Analyse Complexe

Auteurs

Hameida Ali

Université Frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Memou Ameur

Université M'Sila

Département de Mathématiques

2019 - 2020

Table des matières

Introduction

L'analyse complexe concerne en partie l'étude des fonctions à valeurs complexes d'une variable complexe. La plus importante de ces fonctions est le complexe exponentiel e^z utilisé dans la définition des fonctions trigonométriques et logarithmiques.

Comme nous ne pouvons pas tracer les graphiques de fonctions à valeurs complexes d'une variable complexe (cela nécessiterait quatre dimensions), nous les visualisons sous forme de transformations d'un plan complexe, le z-plan, dans un autre plan, le w-plan.
Les fonctions à valeurs complexes d'une variable complexe et leurs propriétés de transformations sont explorées ici.

Les nombres complexes, comme beaucoup d'autres idées en mathématiques, ont d'importantes applications en sciences et peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes du monde réel.

Certaines de ces applications sont discutées dans les deux derniers chapitres. Dans ce chapitre, les applications se limitent à la recherche des racines de certaines équations polynomiales, algébriques et trigonométriques.

I - Les nombres complexes

1 - L'unité imaginaire, nombre complexe

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution IR, car pour tout nombre réel x le carré x^2 est non négatif, et donc $x^2 + 1$ ne peut jamais être inférieur à 1. Néanmoins, il s'avère très utile de supposer qu'il existe un nombre i pour lequel on a

$$(1) \qquad i^2 = -1.$$

« i » s'appelle **unité imaginaire**.

Un nombre complexe est un nombre quelconque de la forme $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des nombres réels et i est l'unité imaginaire.

Les notations $a + ib$ et $a + bi$ sont utilisées de manière interchangeable.

Le nombre réel a dans $z = a + ib$ est appelé la **partie réelle** de z; le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z. Les parties, réelle et imaginaire, d'un nombre complexe sont abrégées en $\mathbf{Re}(\boldsymbol{z})$ et $\mathbf{Im}(\boldsymbol{z})$, respectivement.

Notez que $\mathrm{Re}z$ et $\mathrm{Im}z$ sont des nombres réels. Une erreur courante est de dire que $\mathrm{Im}z = bi$. Le «i» ne devrait pas être là.

Exemple, si $z = 4 - 9i$, alors $\mathrm{Re}(z) = 4$ et $\mathrm{Im}(z) = -9$.

Une constante réelle b que multiplie l'imaginaire i est appelé un nombre imaginaire pur (bi).

Exemple, $z = 6i$ est un nombre imaginaire pur.

Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ sont **égaux** $(z_1 = z_2)$ si leurs parties, réelle et imaginaire correspondantes sont égales, c'est-à-dire

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2 \text{ et } \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2)$$

Traditionnellement, les lettres z et w sont utilisées pour représenter des nombres complexes. Comme tout nombre complexe est spécifié par deux nombres réels, on peut les visualiser en traçant un point avec les coordonnées (a, b) dans le plan pour un nombre complexe $a + bi$.

Le plan dans lequel on trace ces nombres complexes est appelé plan complexe, ou plan Argand.

2 - Opérations sur les nombres complexes

Vous pouvez ajouter, multiplier et diviser des nombres complexes. Voici comment:

Ajouter (**soustraire**) $z = a + bi$ et $w = c + di$

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i,$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i.$$

Pour **multiplier** z et w, procédez comme suit:

$$zw = (a + bi)(c + di) = a\,(c + di) + bi(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

où nous avons utilisé la propriété de définition $i^2 = -1$ pour supprimer i^2.

Pour **diviser** deux nombres complexes, on utilise toujours le truc suivant.

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{(a + bi)\,(c - di)}{(c + di)\,(c - di)}$$

Maintenant

$$(c + di)\,(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2,$$

Donc

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$$

Évidemment, vous ne voulez pas mémoriser cette formule: au lieu de cela, vous vous souvenez de l’astuce, c’est-à-dire diviser $a + bi$ par $c + di$, vous multipliez le numérateur et le dénominateur avec $c - di$.

Si z est un nombre complexe, le nombre obtenu en changeant le signe de sa partie imaginaire s'appelle le **conjugué complexe** ou simplement **conjugué** de z et est désigné par le symbole $\boldsymbol{\bar{z}}$. En d'autres termes, si $z = a + ib$, alors son conjugué est $\bar{z} = a - ib$.

Exemple, si $z = 6 + 3i$, alors $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$, alors $\bar{z} = -5 + i$.

si z est un nombre réel, disons $z = 7$, alors $\bar{z} = 7$.

À partir des définitions de l'addition et de la soustraction de nombres complexes, on voit facilement que le conjugué d'une somme et d'une différence de deux nombres complexes est la somme et la différence des conjugués:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{et} \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

De plus, nous avons les propriétés supplémentaires suivantes:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z,$$

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$$

$$z\,\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

Puisque $a = \mathrm{Re}(z)\ et\ b = \mathrm{Im}(z)$, nous avons

$$\mathrm{Rez} = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad et\ \ \mathrm{Imz} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Plan complexe

En raison de la correspondance entre un nombre complexe $z = x + iy$ et un et un seul point (x, y) dans un plan de coordonnées, nous utiliserons les termes nombre complexe et point de manière interchangeable.

Le plan de coordonnées illustré à la figure 1.1 est appelé le plan complexe ou simplement le z-plan. L'axe horizontal ou axe x est appelé axe réel car chaque point sur cet axe représente un nombre réel. L'axe vertical ou y est appelé axe imaginaire car un point sur cet axe représente un nombre imaginaire pur.

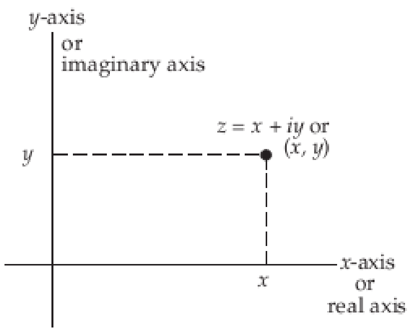


Figure 1. z-Plan

Les vecteurs

Dans d'autres cours, vous avez sans doute constaté que les chiffres dans une paire ordonnée de nombres réels peuvent être interprétés comme les composantes d'un vecteur. Ainsi, un nombre complexe $z = x + iy$ peut également être considéré comme un vecteur de position à deux dimensions, c'est-à-dire un vecteur dont le point initial est l'origine et dont le point terminal est le point (x, y). Voir la figure 1.2.

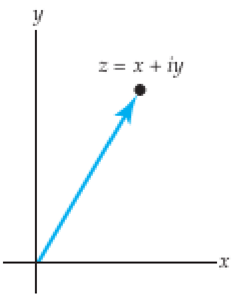


Figure 1.2 z comme vecteur de position

Cette interprétation de vecteur nous incite à définir la longueur du vecteur z comme distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ entre l'origine et le point (x, y). Cette longueur reçoit un nom spécial.

3 - Argument et valeur absolue

Module

Pour tout nombre complexe donné $z = a + bi$ on définit, la **valeur absolue** ou le **module**, par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (1)$$

Exemple 1

Si $z = 2 - 3i$, alors de (1) on trouve le module du nombre à $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

Si z = -9i, alors (1) donne $|-9i| = \sqrt{(-9)^2} = 9$.

Propriétés

Rappelez-vous que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ le produit $z\,\bar{z}$ est un nombre réel; Plus précisément, $z\,\bar{z}$ est la somme des carrés des parties réelle et imaginaire de z: $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$. L'inspection de (1) montre alors que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Les relations

$$|z|^2 = z\,\bar{z} \quad \text{et} \quad |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} \qquad (2)$$

méritent d'être stockés en mémoire. Le module d'un nombre complexe z a les propriétés supplémentaires.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (3)$$

Notez que lorsque $z_1 = z_2 = z$, la première propriété de (3) indique que

$$\lceil z^2 \rceil = |z|^2. \qquad (4)$$

Nous avons aussi

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Argument

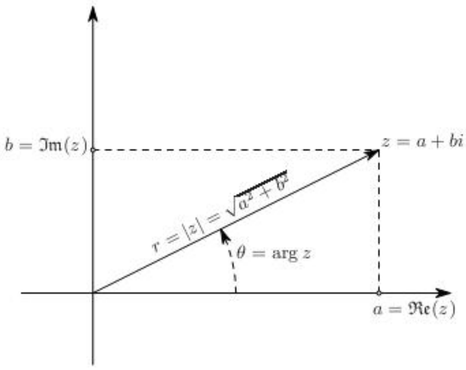


Figure 1. Nombre complexe.

L'angle θ s'appelle l'**argument** du nombre complexe z. Notation: $\arg z = \theta$.

L'argument est défini de manière ambiguë:

il est défini à un multiple de 2π près.

Par exemple. l'argument de -1 pourrait être π, ou $-\pi$, ou 3π, ou, etc.

En général, on dit $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$, où k peut être un entier quelconque.
De la trigonométrie, on voit que pour tout nombre complexe $z = a + bi$ on a

$$a = |z|cos\theta, \qquad \text{et } b = |z|\, sin\theta,$$

de sorte que

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{et} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}.$$

Exemple 2
Trouver l'argument et la valeur absolue de $z = 2 + i$.

Solution:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

z se situe dans le premier quadrant et son argument θ est un angle compris entre 0 et $\pi / 2$.

De $\tan\theta = \frac{1}{2}$ on conclut alors $\arg(2 + i) = \theta = \arctan\frac{1}{2}$

Exemple 3: ensemble de points dans le plan complexe

Décrivez l'ensemble des points z du plan complexe qui satisfont $|z| = |z - i|$.

Solution
Nous pouvons interpréter l'équation donnée comme une égalité de distances: La distance d'un point z à l'origine est égale à la distance de z au point géométriquement, il semble plausible d'après la figure 1.4 que l'ensemble des points z se trouvent sur une ligne horizontale.

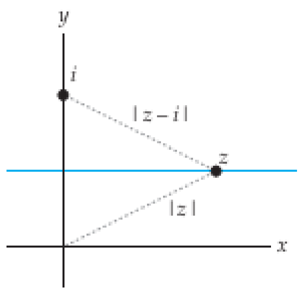


Figure 1.4 La droite horizontale représente l'ensemble des points satisfaisant $|z| = |z - i|$.

Pour établir ceci analytiquement, nous utilisons (1) et (4) pour écrire $|z| = |z - i|$ comme:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

La dernière équation donne $y = \frac{1}{2}$. Puisque l'égalité est vraie pour x arbitraire, $y = 1/2$ est une équation de la ligne horizontale représentée en couleur dans la figure 1.4.

Les nombres complexes satisfaisant $|z| = |z - i|$ peuvent alors être écrit comme $z = x + \frac{1}{2}i$.

---

4 - Géométrie de l'arithmétique

Comme nous pouvons représenter les nombres complexes sous forme de points dans le plan complexe, nous pouvons également essayer de visualiser les opérations arithmétiques «addition» et «multiplication». Pour ajouter z et w, on forme le parallélogramme avec l'origine, z et w sous forme de sommets. Le quatrième sommet est alors $z + w$. Voir la figure2.

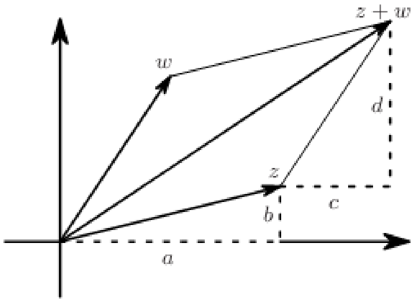


Figure 2. Addition de $z = a + ib$ et $w = c + id$.

Pour comprendre la multiplication, examinons d'abord la multiplication avec i. Si $z = a + bi$ alors

$$iz = i\,(a + bi) = ia + bi^2 = ai - b = -b + ai.$$

Ainsi, pour former iz à partir du nombre complexe z, on fait pivoter z de 90 degrés dans le sens contraire d'une montre. Voir la figure3.

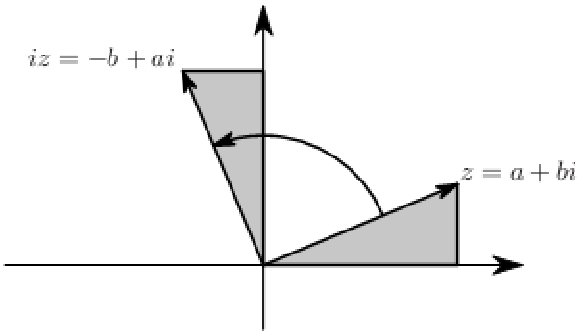


Figure 3. Multiplication de $a + ib$ par i.

Si a est un nombre réel, la multiplication de $w = c + di$ par a donne $aw = ac + adi$, de sorte que aw pointe dans la même direction si $a > 0$, mais éloigné de l'origine. Si $a < 0$ alors aw pointe dans la direction opposée. Voir la figure4.

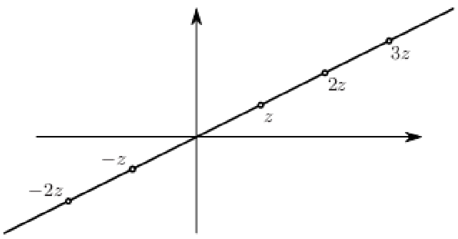


Figure 4. Multiplication d'un nombre réel a par un complexe z.

Ensuite, pour multiplier $z = a + bi$ et $w = c + di$, nous écrivons le produit comme

$$zw = (a + bi)\, w = aw + biw.$$

La figure 5 montre $a + bi$ à droite. À gauche, le nombre complexe w a d'abord été dessiné, puis aw a été tiré. Ensuite, iw et biw ont été construits, et finalement $zw = aw + biw$ a été dessiné en ajoutant aw et biw.

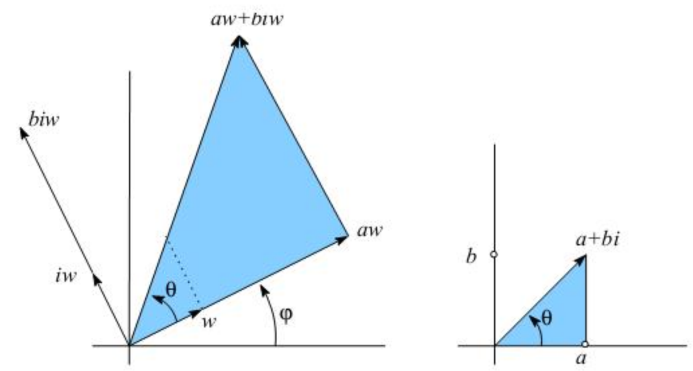


Figure 5. Multiplication de deux nombres complexes.

On voit sur la figure 5 que, puisque iw est perpendiculaire à w, le segment de droite de 0 à biw est perpendiculaire au segment de 0 à aw. Par conséquent, le grand triangle ombré à gauche est un triangle rectangle. La longueur du côté adjacent est $a|w|$, et la longueur du côté opposé est $b|w|$. Le rapport de ces deux longueurs est $a/\, b$, qui est identique à celui du triangle rectangle en bas à droite. Nous concluons donc que ces deux triangles sont semblables.

Le triangle à gauche est $|w|$ fois plus grand que le triangle à droite. Les deux angles marqués θ sont égaux.

Comme $|zw|$ est la longueur de l'hypoténuse du triangle ombré à gauche, c'est $|w|$ fois l'hypoténuse du triangle à droite, c'est-à-dire $|zw| = |w| \cdot |z\,|$.

L'argument de zw est l'angle $\theta + \phi$; puisque $\theta = \arg z \; et \; \phi = \arg w$ nous obtenons les deux formules suivantes

$$|zw| = |z| \cdot |w| \qquad (3)$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w, \qquad (4)$$

en d'autres termes,

> *lorsque vous multipliez des nombres complexes, leurs longueurs sont multipliées et leurs arguments sont ajoutés.*

5 - Applications en trigonométrie

(a) Pour tout θ, le nombre $z = \cos\theta + i\sin\theta$ a la longueur 1: il est situé sur le cercle unitaire. Son argument est $\arg z = \theta$.

Inversement, tout nombre complexe sur le cercle unitaire est de la forme $\cos\varphi + i\sin\varphi$, où φ est son argument.

(b) Pour deux angles θ et ϕ, on peut multiplier $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Le produit zw est un nombre complexe de valeur absolue

$$|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1$$

et avec l'argument

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w = \theta + \varphi.$$

Donc, zw se trouve sur le cercle unitaire et doit être égale à $\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)$. Ainsi nous avons

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi). \qquad (5)$$

En multipliant le côté gauche, nous obtenons

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi). \qquad (6)$$

Comparez les côtés droit de (5) et (6) et vous obtenez **les formules d'addition pour Sinus et Cosinus**:

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

(c) Pour tout nombre complexe z, l'argument de son carré z^2 est

$$\arg(z^2) = \arg(z.z) = \arg z + \arg z = 2\arg z.$$

L'argument de son cube est

$$\arg z^3 = \arg(z \cdot z^2) = arg\ (z) + arg z^2 = \arg z + 2\arg z = 3\arg z.$$

En continuant comme ça (par récurrence sur n), on obtient

$$\arg z^n = n \arg z \text{ pour tout entier } n. \qquad (7)$$

En appliquant ceci à $z = cos\theta + isin\theta$, vous trouvez que z^n est un nombre complexe de valeur absolue $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$ et l'argument $n\arg z = n\theta$.

D'où $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. Nous avons donc trouvé

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \qquad (8)$$

C’est **la formule de de Moivre**.

Par exemple, pour $n = 2$, cela nous indique que

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta.$$

La comparaison de parties réelles et imaginaires à gauche et à droite vous donne les formules

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \text{ et } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Pour $n = 3$ vous obtenez, en utilisant le théorème binomial, ou le triangle de Pascal,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

D'où

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

De cette façon, il est assez facile d'écrire des formules similaires pour $\sin 4\theta, \sin 5\theta$, etc. .

La fonction exponentielle complexe
Nous donnons enfin une définition de e^{a+bi}. Considérons d'abord le cas $a = 0$:

Pour tout nombre réel t on définit

$$e^{it} = \cos t + i\sin t. \qquad (9)$$

Voir la figure 6.

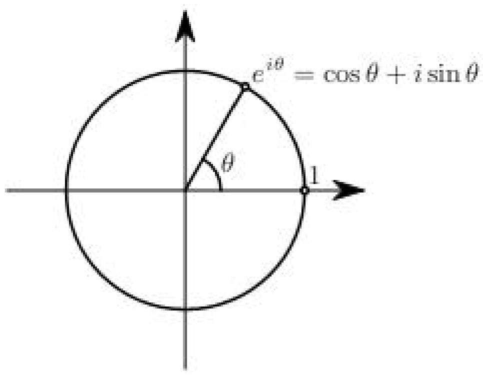


Figure 6. Définition d'Euler de $e^{i\theta}$.

Exemple.
$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Cela conduit à la célèbre formule d'Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$, qui combine les cinq quantités les plus fondamentales en mathématiques: $e, \pi, i, 1$ et 0.

Raisons pour lesquelles la définition (9) semble une bonne définition.

Sachant que la série de Taylor de e^x dans IR est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Substituons e^{it} dans e^x:

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \ + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos t + i\sin t. \end{aligned}$$

Ce n'est pas une preuve, car nous n'avions auparavant prouvé que la convergence de la série de Taylor e^x si x était un nombre réel, et nous avons prétendu ici que la série est également bonne si vous substituez $x = it$.

En fonction de t, la définition (9) nous donne la dérivée correcte. À savoir, en utilisant la règle de la chaîne (c'est-à-dire en prétendant qu'elle s'applique toujours pour des fonctions complexes), on obtiendrait

$$\frac{d(e^{it})}{dt} = ie^{it}.$$

En effet, c'est correct. Pour voir cela découler de notre définition (9):

$$\frac{d(e^{it})}{dt} = \frac{d(\cos t + i\sin t)}{dt} = \frac{d(\cos t)}{dt} + i\frac{d(\sin t)}{dt}$$

$$= -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t)$$

La formule $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ est toujours valable. Nous avons plutôt

$$e^{it+is} = e^{it}.e^{is}.$$

Pour vérifier cela, remplacez les exponentielles par leur définition:

$$e^{it}.e^{is} = (\cos t + i\sin t)(\cos s + i\sin s) = \cos(t+s) + i\sin(t+s) = e^{i(t+s)}$$

Exiger que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ soit vrai pour tous les nombres complexes nous aide à déterminer ce que e^{a+ib} devrait être pour des nombres complexes arbitraires $a + bi$.

Pour tout nombre complexe $a + bi$, on définit $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$.

6 - Solutions complexes d'équations polynomiales

La formule quadratique bien connue vous dit que l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad (11)$$

a deux solutions, données par

$$x \pm = \frac{-b\ \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad D = b^2 - 4ac. \qquad (12)$$

Si les coefficients a, b, c sont des nombres réels et si le discriminant D est positif, alors cette formule donne bien deux solutions réelles $x+$ et $x-$. Cependant, si $D < 0$, alors il n'ya pas de solutions réelles, mais il existe deux solutions complexes, à savoir:

$$x\pm = \frac{-b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a}$$

Exemple:

résolvez $x^2\ +\ 2x + 5 = 0.$

Solution:

Utilisez la formule quadratique, ou complétez le carré:

$$x^2\ +\ 2x + 5 = 0\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x\ +\ 1)^2\ = -4$$
$$\Leftrightarrow x\ + 1 = \pm\, 2i\ \ \Leftrightarrow x = -1 \pm\ 2i.$$

Donc, si vous autorisez des solutions complexes, chaque équation du second degré a deux solutions, à moins que les deux solutions ne coïncident (le cas D = 0, dans lequel il n'existe qu'une solution.)

7 - Racines d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe donné, il existe une méthode pour trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$z^n = w, \qquad (13)$$

si $n = 2{,}3{,}4{,}\cdots$ est un entier donné.

Pour trouver ces solutions, écrivez w sous forme polaire, c'est-à-dire que vous trouvez $r > 0$ et θ tel que $w = re^{i\theta}$. Alors

$$z = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$$

est une solution de (13). Mais ce n'est pas la seule solution, car l'angle θ pour lequel $w = re^{i\theta}$ n'est pas unique - il est uniquement déterminé jusqu'à un multiple de 2π. Ainsi, si nous avons trouvé un angle θ pour lequel $w = re^{i\theta}$, alors nous pouvons aussi écrire

$$w = re^{i(\theta + 2k\pi)}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Les nième racines de w sont alors

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi)}$$

Ici, k peut être n'importe quel entier, il semble donc qu'il existe une infinité de solutions. Cependant, si vous augmentez k de n, l'exposant ci-dessus augmente de $2\pi i$, et donc z_k ne change pas dans la formule:

$$z_n = z_0, \qquad z_{n+1} = z_1, \qquad z_{n+2} = z_2, \qquad \ldots, \qquad z_{n+k} = z_k$$

Donc, si vous prenez $k = 0,1,2,\cdots, n - 1$, vous avez toutes les solutions.

Les solutions z_k forment toujours un polygone régulier à n côtés.

Exemple

Trouver la racine $6ième$ de w = 1. Nous devons résoudre $z^6 = 1$. Commencez par écrire 1 sous forme polaire,

$$1 = 1 \cdot e^{0i} = 1 \cdot e^{2k\pi i}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ensuite, nous prenons la 6ème racine et trouvons

$$z_k = 1^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2k\pi i}{6}} = e^{\frac{k\pi i}{3}}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les six racines sont

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i2\sqrt{3}, \qquad z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

$$z_3 = -1, \qquad z_4 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad z_5 = e^{\frac{5\pi i}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

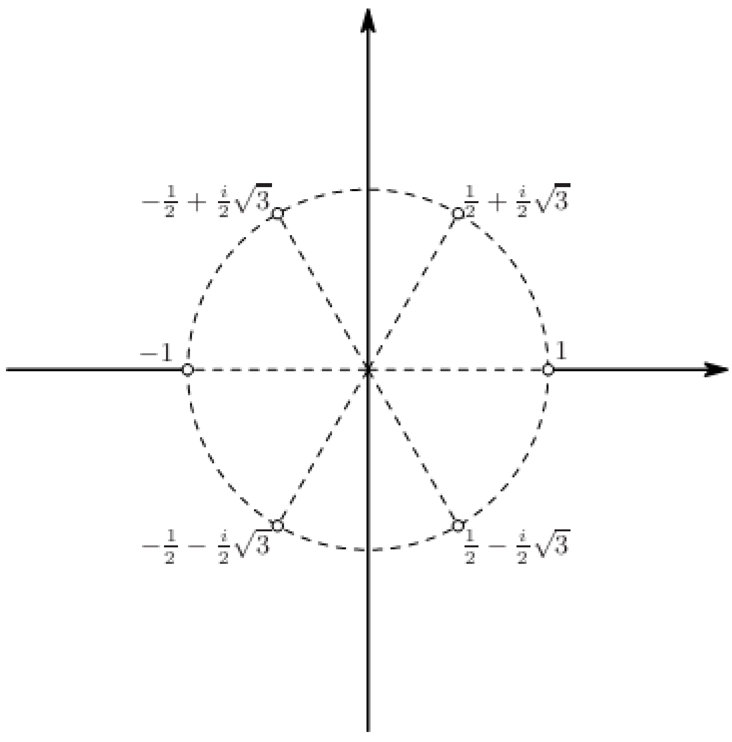


Figure 7. Les six racines de1. Il y en a six et ils sont rangés dans un hexagone régulier

8 - Régions dans le plan complexe

Dans cette section, nous rappelons quelques faits concernant des ensembles de nombres complexes, ou points dans le plan, et leur proximité les uns aux autres.

- Supposons que $z_0 = x_0 + iy_0$, puisque $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ est la distance entre les points $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, les points $z = x + iy$ qui vérifient l'équation $|z - z_0| = \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} > 0$, se situent sur **un cercle** de rayon $\boldsymbol{\varepsilon}$ centré au point z_0
- Les points z qui satisfont l'inégalité $|z - z_0| \leq r$ peuvent être soit sur le cercle $|z - z_0| = \boldsymbol{\varepsilon}$ ou dans le cercle. On dit que l'ensemble des points définis par $|z - z_0| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ est **un disque** de centre z_0 et de rayon $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, un $\boldsymbol{\varepsilon} -$ **voisinage** d'un point z_0 donné est l'ensemble $|z - z_0| < \varepsilon$. Il se compose de tous les points z situés à l'intérieur, mais pas sur le cercle centré sur z_0 et de rayon positif ε.
- Un **voisinage pointé de $\boldsymbol{z_0}$** ou un **disque pointé**, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ est composé de tous les points z dans un $\varepsilon -$ voisinage de z_0 à l'exception du point z_0 lui-même.
- Un point z_0 est dit **point intérieur** d'un ensemble S lorsqu'il existe un voisinage de z_0 ne contenant que des points de S.
- z_0 est appelé **point extérieur** de S lorsqu'il existe un voisinage de celui-ci ne contenant aucun point de S.
- Si z_0 n'est ni l'un ni l'autre, c'est un **point frontière** de S. Ainsi, un point frontière est un point dont tous les voisinages contiennent au moins un point de S et au moins un point qui n'est pas de S.

La totalité de tous les points frontières est appelée **la frontière** de S.

- Un ensemble est appelé **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points frontières.

Clairement, un ensemble est ouvert si et seulement si chacun de ses points est un point intérieur.

- Un ensemble est **fermé** s'il contient tous ses points frontières et la **fermeture** d'un ensemble S est l'ensemble fermé constitué de tous les points de S ainsi que de la frontière de S.
- Un ensemble ouvert est dit **connexe** si chaque paire de points z_1 et z_2 de S peut être jointe par une ligne polygonale, constituée d'un nombre fini de segments de ligne joints bout à bout, qui se trouve entièrement dans S.
- Un ensemble ouvert non vide qui est connexe s'appelle un **domaine**.
- Un domaine avec certains, aucun ou tous ses points frontières est dit être une **région**.
- Un ensemble S est **borné** si chaque point de S est situé à l'intérieur d'un cercle $|z| = R$, sinon, il est **non borné**.
- Un point z_0 est dit point **d'accumulation** d'un ensemble S si chaque voisinage pointé de z_0 contient au moins un point de S.

II - Les fonctions complexes d'une variable complexe

1 - Fonction complexe d'une variable complexe

Soit S un ensemble de nombres complexes.

Une fonction complexe f de la variable complexe z, définie sur S, est une correspondance qui attribue à chaque z de S un nombre complexe w.

Le nombre w s'appelle la valeur de f en z et est noté $f(z)$, c'est-à-dire, $w = f(z)$.

L'ensemble S s'appelle le domaine de définition de f.

Soit $w = f(z)$ une fonction complexe de la variable complexe z, soient $w = u + iv$ et $z = x + iy$, alors u et v dépendent des valeurs des variables réelles x et y ; par conséquent

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Cela montre que toute fonction complexe $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$ est équivalente à une paire de deux fonctions à valeurs réelles u et v des variables réelles x et y, cette expression s'appelle forme algébrique de f.

En coordonnées polaires, $z = re^{i\theta}$, nous avons $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, cette expression s'appelle forme polaire de f.

Exemple 1.
Considérons la fonction complexe $f(z) = z^2$, alors $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

Par suite $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

Lorsque les coordonnées polaires sont utilisées,

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta$$

Donc, $u(r, \theta) = r^2\cos 2\theta$ et $v(r, \theta) = r^2\sin 2\theta$.

- Si n est zéro ou un entier positif et si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes complexes, où $a_n \neq 0$, la fonction

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

est appelée **fonction polynôme** de degré n.

Ici, la somme n'a qu'un nombre fini de termes et le domaine de définition est le plan z tout entier.

- Un quotient de la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \text{ où, } P(z) \text{ et } Q(z) \text{ sont des polynômes}$$

est appelé une **fonction rationnelle** et est défini à chaque point z où $Q(z) \neq 0$.

Exercice 1

Exprimer la fonction $f(z) = z^3 + z + 1$ *sous la forme* $f(z) = u(x,y) + iv\,(x,y)$.

Solution.

Soit $z = x + iy$. Alors, $f(z) = z^3 + z + 1 = (x+iy)^3 + (x+iy) + 1$

après développement, nous obtenons

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y).$$

2 - Limite d'une fonction d'une variable complexe

Définition

Soit une fonction f *définie en tout point* z *dans un voisinage pointé de* z_0 *sauf peut être en* z_0 *.*

On dit alors que ***la limite de*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$*, lorsque* z *approche* z_0*, est un nombre* w_0*, ou en symboles* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$*, si pour chaque nombre positif* ε*, il existe un nombre positif* δ *tel que*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \textit{ chaque fois que } 0 < |\, z - z_0 \,| < \delta.$$

(c'est-à-dire que la limite de $f(z)$ à l'approche de z_0 est le nombre w_0, si le point $w = f(z)$ peut être rendu arbitrairement proche de w_0 si on choisit le point z assez proche de z_0 mais distinct).

Géométriquement, cela signifie que pour chaque ε-voisinage $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0, il existe un voisinage pointé $0 < \; z - z_0 \,| < \delta$ de z_0 tel que chaque point z dans celui-ci a une image w se déplaçant dans le $\varepsilon -$ voisinage.

Exemple 2:

Montrer, en utilisant la définition, que

$$\lim_{z \to 1+i} (2 + i)\, z = 1 + 3i$$

Solution

Selon la définition,

$$\lim_{z \to 1+i} (2 + i)\, z = 1 + 3i,$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|(2+i)z - (1 + 3\,i)| < \varepsilon \quad \text{dés} \;\; 0 < |z - (1+i)| < \delta.$$

Pour prouver que la limite existe, il faut trouver une valeur appropriée de δ pour une valeur donnée de ε. En d'autres termes, pour une valeur donnée de ε, nous devons trouver un nombre positif δ avec la propriété que si

$$0 < |z - (1+i)| < \delta \Rightarrow |(2+i)z - (1+3i)| < \varepsilon.$$

Une façon de trouver δ est de «travailler à l'envers». L'idée est de commencer par l'inégalité:

$$|(2 + i)\, z - (1 + 3\,i)\,| < \varepsilon \qquad (4)$$

puis utilisez les propriétés des nombres complexes et le module pour manipuler cette inégalité jusqu'à ce qu'elle implique l'expression $|z - (1+i)|$.

Ainsi, une première étape naturelle consiste à factoriser $(2+i)$ sur le côté gauche de (4):

$$|2+i|.\left|z-\frac{1+3i}{2+i}\right|<\varepsilon. \qquad (5)$$

Comme $|2+i|=\sqrt{5}$ et $\frac{1+3i}{2+i}=1+i$, (5) est équivalente à

$$\sqrt{5}.|z-(1+i)|<\varepsilon \quad ou\ |z-(1+i)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}. \qquad (6)$$

Ainsi, (6) indique que nous devrions prendre $\delta = \varepsilon / \sqrt{5}$. Gardez à l'esprit que le choix de δ n'est pas unique. Notre choix de $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$ résulte des manipulations algébriques particulières que nous avons utilisées pour obtenir (6).

Après avoir trouvé δ, nous présentons maintenant la preuve formelle que

$$\lim_{z\to 1+i}(2+i)\,z = 1+3i$$

cela n'indique pas comment le choix de δ a été fait:

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta=\varepsilon/\sqrt{5}$. Si $0<|\,z-(1+i)|<\delta$, alors nous avons $|\,z-(1+i)|<\varepsilon\,/\,\sqrt{5}$.

En multipliant les deux côtés de la dernière inégalité par $|2+i|=\sqrt{5}$ on obtient:

$$|2+i\,|\cdot|z-(1+i)|<\sqrt{5}\cdot\varepsilon/\sqrt{5} \text{ ou } |(2+i)z-(1+3\,i)|<\varepsilon.$$

Par conséquent, $|(2+i)z-(1+3i)|<\varepsilon$ chaque fois que $0<|z-(1+i)|<\delta$.

Donc, selon la définition, nous avons prouvé que $\lim_{z\to 1+i}(2+i)\,z = 1+3i$.

Notez que la limite d'une fonction $f(z)$ en un point z_0, si elle existe, elle est unique.

Critère de non existence d'une limite

Si f approche deux nombres complexes $w_1 \neq w_2$ pour deux courbes ou chemins différents de z_0, alors $\lim_{z\to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Exemple 3

Montrer que $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas.

Solution

Nous montrons que cette limite n'existe pas en déterminant deux manières différentes de considérer l'approche de z vers 0 qui donne des valeurs différentes pour $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$. Tout d'abord, on suppose que z s'approcher de 0 le long de l'axe réel. C'est-à-dire que nous considérons des nombres complexes de la forme $z = x + 0i$ où le nombre réel x s'approche de 0. Pour ces points, nous avons:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z\to 0}\frac{x+0i}{x-0i} = \lim_{z\to 0} 1 = 1. \qquad (2)$$

Par contre, si on suppose que z approche 0 le long de l'axe imaginaire, alors $z = 0 + iy$ où le nombre réel y s'approche de 0. Pour cette approche, on a:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z\to 0}\frac{0+iy}{0-iy} = \lim_{z\to 0} -1 = -1. \qquad (3)$$

Puisque les valeurs entre (2) et (3) ne sont pas identiques, nous concluons que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas.

Théorème 2.2. 1

Soient

$$f(z) = u\,(x,y) + iv(x,y), \quad (z = x + iy)$$

et $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$. *Alors,*

$$\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \ \ et \ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0\right).$$

Exemple 4:

Utilisez le théorème 1 pour calculer $\lim_{z \to 1+i} (z^2 + i)$.

Solution

Puisque

$$f(z) = z^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)\,i$$

nous pouvons appliquer le théorème1 avec

$$u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy + 1 \text{ et } z_0 = 1 + i.$$

Identifier $x_0 = 1 \; et \; y_0 = 1$, nous déterminons $u_0 \; et \; v_0$ en calculant les deux limites réelles:

$$u_0 = \lim_{(x,y) \to (1,1)} x^2 - y^2 = 0 \text{ et } v_0 = \lim_{(x,y) \to (1,1)} 2xy + 1 = 3.$$

et donc $w_0 = u_0 + iv_0 = 0 + i(3) = 3i$.

Par suite

$$\lim_{z \to 1+i} (z^2 + i) = 3i.$$

Des règles similaires, comme dans le cas des limites de fonctions réelles, seront valables dans le cas complexe.

Théorème 2.2. 2

- *Si* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *et si* $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_1$, *alors*

$$\lim_{z \to z_0} \big(f(z) + g(z)\big) = w_0 + w_1,$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z).\, g(z)) = w_0.\, w_1\,,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_1}, \ si\; w_1 \neq 0.$$

- *De plus,* $\lim_{z \to z_0} c = c$ *et* $\lim_{z \to z0} z = z_0$, *où* z_0 *et* c *sont des nombres complexes quelconques et* $\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$, $(n = 1,2,\ldots)$.

- *La limite d'un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ lorsque z s'approche d'un point z_0 est la valeur du polynôme en ce point. c'est-à-dire $\lim\limits_{z \to z0} P(z) = P(z_0)$.*

Exemple 5

Utilisez le théorème 2 pour calculer les limites

(a) $\lim\limits_{z \to i} \frac{(3+i)\, z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$,

(b) $\boldsymbol{\lim\limits_{z \to 1+\sqrt{3}\, i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}}$

Solution

(a) Nous avons $\lim\limits_{z \to i} z^2 = i^2 = -1$, de même $\lim\limits_{z \to i} z^4 = i^4 = 1$, alors

$$\lim_{z \to i}\big((3+i)z^4 - z^2 + 2z\big) = (3+i)(1) - (-1) + 2(i) = 4 + 3i$$

Et comme $\lim\limits_{z \to i}(z+1) = 1 + i$, alors

$$\lim_{z \to i} \frac{(3\ +\ i)\, z^4 -\ z^2\ +\ 2z}{z\ +1} = \frac{\lim_{z \to i}\big((3+i)z^4 - z^2 + 2z\big)}{\lim_{z \to i}(z+1)} = \frac{4+3i}{1+i}$$

Après avoir effectué la division, on obtient

$$\lim_{z \to i} \frac{(3\ +\ i)\, z^4 -\ z^2\ +\ 2z}{z\ +1} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} i$$

(b) Pour trouver $\lim\limits_{z \to 1+\sqrt{3}\, i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$, nous procédons comme dans (a):

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} (\, z^2 - \ 2z + 4) = \big(1 + \sqrt{3}i\big)^2 - 2\big(1 + \sqrt{3}i\big) + 4$$

$$= -2\ +\ 2\sqrt{3}\mathrm{i}\ -\ 2\ -\ 2\sqrt{3}\mathrm{i}\ +\ 4\ =\ 0$$

Et $\lim\limits_{z \to 1+\sqrt{3}\, i} \big(z\ -\ 1\ - \sqrt{3}i\big) = 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3i} = 0$

Il semble que nous ne puissions pas appliquer le théorème 2 car la limite du dénominateur est 0. Cependant, on constate que $1\ +\ \sqrt{3}i$ est une racine du polynôme quadratique $z^2 -\ 2z + 4$. Rappelons que si z_1 est la racine d'un polynôme quadratique, alors $z\ -\ z_1$ est un facteur du polynôme. En utilisant une longue division, nous trouvons que

$$z^2 -\ 2z + 4 = (z - 1\ +\ \sqrt{3}i\,)(z - 1 -\ \sqrt{3}i\,)$$

Donc

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 -\ 2z + 4}{z\ -\ 1\ - \sqrt{3i}} = \lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{\big(z - 1\ +\ \sqrt{3i}\big)\big(z - 1 -\ \sqrt{3i}\big)}{z\ -\ 1\ - \sqrt{3i}}$$

$$= \lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \left(z - 1 + \sqrt{3i}\right) = 1 + \sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$$

Ainsi

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3i}} = 2\sqrt{3}i$$

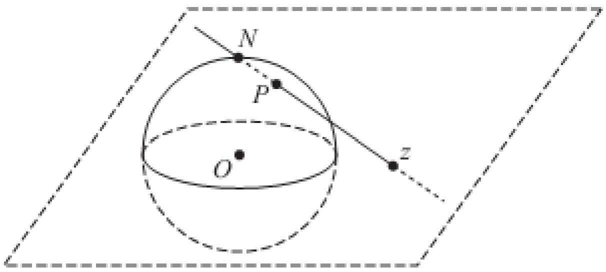
Limites impliquant le point à l'infini
Le plan complexe avec le point à l'infini est appelé le plan complexe étendu.

Pour visualiser le point à l'infini, noté ∞, on peut penser que le plan complexe passe par l'équateur d'une sphère unité centrée à l'origine.

A chaque point z du plan correspond exactement un point P sur la surface de la sphère.

Le point P est le point où la ligne passant par z et le pôle nord N coupe la sphère.

De la même manière, à chaque point P de la surface de la sphère, autre que le pôle nord N, correspond exactement un point z dans le plan. En supposant le point N de la sphère correspondre au point à l'infini, on obtient une correspondance un pour un entre les points de la sphère et les points du plan complexe étendu. La sphère est connue sous le nom de sphère de Riemann et la correspondance est appelée projection stéréographique.



Notez que dans l'identification ci-dessus, l'extérieur du cercle unitaire centré à l'origine dans le plan complexe correspond à l'hémisphère supérieur avec l'équateur et le point N supprimé.

De plus, pour chaque petit nombre positif $\varepsilon > 0$, ces points du plan complexe extérieur au cercle $|z| = 1/\varepsilon$ correspond à des points de la sphère proches de N.

Par conséquent, l'ensemble $|z| = 1/\varepsilon$ est appelé un ε-voisinage de ∞. Avec cette définition de ε −voisinage de ∞, on peut définir des limites impliquant le point à l'infini comme plus haut. Aussi, nous avons:

Si z_0 et w_0 sont des points dans les plans z et w, respectivement, alors

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \text{ ssi } \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

et

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \text{ ssi } \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0.$$

De plus,

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \text{ ssi } \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

3 – Continuité

Définition

- *Une fonction f est dite **continue** en un point z_0 si:*

(i) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe,* ***(ii)*** $f(z_0)$ *existe et* ***(iii)*** $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Ou d'une manière équivalente :

Si pour chaque nombre positif ε, il existe un nombre positif δ tel que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ chaque fois que } |\, z - z_0 \,| < \delta.$$

- *Une fonction d'une variable complexe est dite continue dans une région R si elle est continue en chaque point de R.*

Théorème 2.3. 1

- *Si deux fonctions sont continues en un point, leur somme et leur produit sont également continus en ce point et leur quotient est continu à un tel point si le dénominateur n'est pas nul en ce point.*
- *En outre, une composition de fonctions continues est elle-même continue.*
- *Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors, la fonction $f(z)$ est continue en un point $z_0 = (x_0, y_0)$ si, et seulement si, ses fonctions composantes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continus en (x_0, y_0).*

Si une fonction complexe f n'est pas continue en un point z_0, on dit que f est discontinu en z_0.

Par exemple, la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est discontinue en $z = i$ et $z = -i$.

Théorème 2.3. 2

Si une fonction $f(z)$ est continue et non nulle en un point z_0, alors $f(z) \neq 0$ dans un voisinage de ce point.

Preuve.

Supposons que $f(z)$ est continue et non nul en z_0.

Soit $\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$. Alors pour un tel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif δ tel que

$$|f(z) - f(z0)| < \frac{|f(z_0)|}{2} \text{ quand } |z - z_0| < \delta.$$

Maintenant, s'il y a un point z dans le voisinage $|z - z_0| < \delta$ auquel $f(z) = 0$, alors nous avons $|f(z_0)| < \frac{|f(z_0)|}{2}$, ce qui est une contradiction.

Cela montre que $f(z) \neq 0$ dans tout le voisinage $|z - z_0| < \delta$ de z_0.

Théorème 2.3. 3

Si une fonction f est continue dans une région R à la fois fermée et bornée, il existe un nombre réel non négatif M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tous les points z dans R, où l'égalité est vraie pour au moins un tel z.

4 - Dérivées

Définition

*Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un voisinage $|z - z_0| < \delta$ d'un point z_0. La **dérivée** de f en z_0 est la limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*et la fonction f est dite **dérivable** en z_0 lorsque $f'(z_0)$ existe.*

En écrivant $\Delta z = z - z_0$, où $z \neq z_0$, on a

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Puisque f est défini dans un voisinage de z_0, le nombre $f(z_0 + \Delta z)$ est toujours défini pour $|\Delta z|$ suffisamment petit. Si nous écrivons $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, alors

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Exemple 6

Utilisez la définition pour trouver la dérivée de

$$f(z) = z^2 - 5z.$$

Solution

Parce que nous allons calculer la dérivée de f à tout moment, on remplace z_0 dans la formule de dérivée par le symbole z. Premièrement,

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) = z^2 + 2z\,\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z.$$

Deuxièmement ,

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= (z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) \\ &= z^2 + 2z\,\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - z^2 + 5z \\ &= 2z\,\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{2z\,\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z} = 2z + \Delta z - 5$$

Et par suite

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z - 5) = 2z - 5$$

D'où $f'(z) = 2z - 5$.

Remarque

Notez que l'existence de la dérivée d'une fonction en un point implique la continuité de la fonction en ce point.

Pour voir cela, supposons que $f'(z_0)$ existe. Alors,

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0).0 = 0.$$

$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Cela montre que f est continu en z_0.

L'exemple suivant montre que la continuité d'une fonction en un point n'implique pas l'existence d'une dérivée en ce point.

Exemple 7
Considérons la fonction à valeur réelle

$$f(z) = |z|^2 = u(x, y) + i\,v(x, y).$$

Alors,

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \text{ et } v(x, y) = 0.$$

Notez que $f(z) = |z|^2$ est continu en chaque point du plan complexe puisque ses composantes sont continues en chaque point. Ici,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Si $\Delta z = (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ horizontalement par les points $(\Delta x, 0)$ sur l'axe réel, alors $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \to 1$ et si $\Delta z = (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ verticalement à travers les points $(0, \Delta y)$ sur l'axe imaginaire, puis $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \to -1$, de sorte que nous avons $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to z + \bar{z}$ et $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to \bar{z} - z$ dans ces cas. Par le caractère unique des limites, cela implique $z + \bar{z} = \bar{z} - z \Rightarrow z = 0$. Par conséquent, $\frac{dw}{dz}$ ne peut pas exister lorsque $z \neq 0$. De plus, lorsque $z = 0$, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$.

Par conséquent, $\frac{dw}{dz}$ existe uniquement en $z = 0$ et sa valeur est 0.

Ainsi, une fonction est continue en un point n'implique pas que la fonction est dérivable en ce point.

Cet exemple montre également qu'une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ peut être dérivable en un point $z = (x, y)$ mais nulle part ailleurs dans aucun voisinage de ce point.

Autre conséquence de la dérivabilité, la règle de L'Hôpital pour le calcul des limites de la forme indéterminée 0/0

Règle de l'Hôpital

Supposons que f et g sont des fonctions dérivables en un point z_0 et que

$f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, mais que $g'(z_0) \neq 0$. Alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad (12)$$

Exemple 8

Calculer $\lim\limits_{z\to 2+i} \frac{z^2-4z+5}{z^3-z-10i}$

Solution

Soit $f(z) = z^2 - 4z + 5$ et $g(z) = z^3 - z - 10i$, vérifie facilement que $f(2+i) = g(2+i) = 0$. La limite donnée a la forme indéterminée $0/0$. Or, puisque f et g sont des fonctions polynomiales, les deux fonctions sont nécessairement dérivables au point $z_0 = 2 + i$. En utilisant

$f'(z) = 2z - 4 \quad et \quad g'(z) = 3z^2 - 1$ alors $f'(2+i) = 2i \quad et \quad g'(2+i) = 8 + 12i$

Ainsi

$$\lim_{z\to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{f'(2+i)}{g'(2+i)} = \frac{2i}{8+12i} = \frac{3}{26} + \frac{1}{13}i$$

Comme dans le cas réel, les formules suivantes sont vraies également pour une dérivation complexe, et nous vous demandons de prouver ces règles en utilisant la définition des dérivés.

(i) $\frac{d}{dz}c = 0$, *pour toute constante complexe* c,

(ii) $\frac{d}{dz}z = 1$

(iii) $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$,

(iv) $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ *où* n *est un entier positif (valide pour les entiers négatifs* $z \neq 0$*)*,

(v) $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$,

(vi) $\frac{d}{dz}[f(z)\, g(z)] = f(z)\, g'(z) + f'(z)\, g(z)$,

(vi) $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ pour $g(z) \neq 0$.

(vii) $\frac{d}{dz}[f(g(z))] = f'(g(z))\, g'(z)$

Exemple 9

Différencier:

$$(a) f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z, \ (b)\, f(z) = \frac{z^2}{4z+1}, \ (c)\, f(z) = (iz^2 + 3z)^5$$

Solution

(a) En utilisant les résultats précédent, nous obtenons

$$f'(z) = 4.3z^3 - 3.5z^2 + 2 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

(b) D'après la règle du quotient,

$$f'(z) = \frac{(4\,z+1)\cdot 2z \ - z^2\cdot 4}{(4\,z+1)^2} = \frac{4z^2 \ + \ 2z}{(4\,z+1)^2}\ .$$

(c) Si on pose $g(z) = iz^2 + 3z$ alors $f(z) = (g(z))^5$ donc $f'(z) = 5g'(z).(g(z))^4$

Or $g'(z) = 2iz + 3$ alors

$$f'(z) = 5(iz^2 \ + \ 3z)^4\,(2iz+3).$$

Exemple 10

Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$ n'est dérivable en aucun point z.

Solution

Soit z n'importe quel point du plan complexe. Avec $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (x+\Delta x) \ + \ 4i\,(y\ + \Delta\, y) \ - \ x \ - \ 4iy \ = \Delta\, x \ + \ 4i\Delta y$$

et donc

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x \ + \ 4i\Delta y}{\Delta x \ + \ i\Delta y}. \qquad (9)$$

(a) $\Delta z \to 0$ le long d'une ligne parallèle à l'axe des x (b) $\Delta z \to 0$ le long d'une ligne parallèle à l'axe des y

Figure 3.1 Approche de z le long d'une ligne horizontale, puis d'une ligne verticale

Or, comme le montre la figure 3.1 (a), si on suppose $\Delta z \ \to \ 0$ le long d'une ligne parallèle à l'axe des x, alors $\Delta\, y = 0$ et $\Delta z = \Delta x$ et

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1. \qquad (10)$$

Par contre, si on suppose $\Delta z \ \to \ 0$ le long d'une ligne parallèle à l'axe des y, comme illustré à la figure 3.1 (b), alors $\Delta x \ = \ 0$ et $\Delta z \ = \ i\Delta y$, de sorte que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4i\Delta y}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 = 4. \qquad (11)$$

Compte tenu du fait évident que les valeurs entre (10) et (11) sont différentes, nous concluons que $f(z) = x + 4iy$ n'est nulle part dérivable; c'est-à-dire que f n'est dérivable en aucun point z.

5 - Équations de Cauchy-Riemann

Dans cette section, nous obtenons une paire d'équations que les dérivées partielles du premier ordre des fonctions composantes u et v d'une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ doivent satisfaire en un point z_0 = (x_0, y_0) lorsque la dérivée de f existe en ce point.

Nous déduisons également une expression pour $f'(z_0)$ en termes de dérivées partielles de u et v.

Théorème 2.5. 1

Supposons que $f(z) = u\ (x, y) + i\ v\ (x, y)$ et que $f'(z)$ existe en un point z_0 = $x_0 + iy_0$.

Alors les dérivées partielles de premier ordre de u et v doivent exister en (x_0, y_0), et elles doivent satisfaire les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x.$$

De plus, $f'(z_0)$ peut être écrite

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + \ i\ v_x(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - \ i\ u_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Preuve.

Soit $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ et $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. Alors

$$\Delta w = \ [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] \ + i\ [v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]$$

Supposons que $(\Delta x, \Delta y) \ \rightarrow \ (0,0)$ horizontalement à travers les points $(\Delta x, 0)$ sur l'axe réel, alors nous avons,

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x,\ y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \ i\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x,\ y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

alors

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

où $u_x(x_0, y_0)$ et $v_x(x_0, y_0)$ désignent les dérivées partielles du premier ordre par rapport à x des fonctions u et v, respectivement, en (x_0, y_0).

Si $\Delta z = (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ verticalement par les points $(0, \Delta y)$ sur l'axe imaginaire, on obtient

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0,\ y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \ i\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0,\ y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0,\ y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0,\ y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

alors

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$$

où $u_y(x_0, y_0)$ et $v_y(x_0, y_0)$ désignent les dérivées partielles du premier ordre par rapport à y des fonctions u et v, respectivement, en (x_0, y_0).

Puisque $f'(z)$ existe en $z_0 = x_0 + iy_0$ donc

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$$

d'où

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \ \ et \ \ v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$$

Et en plus nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

Exemple 11
Soit

$$f(z) = |z|^2 = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$$

alors,

$$u\,(x, y) = x^2 + y^2 \ \text{ et } v(x, y) = 0.$$

D'où

$$u_x = 2x, u_y = 2y \text{ et } v_x = v_y = 0.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées donc en un point (x, y) seulement si $2x = 0$ et $2y = 0$, c'est-à-dire que si $x = y = 0$. Par suite, $f'(z)$ n'existe en aucun point non nul.

Remarque

La satisfaction des équations de Cauchy-Riemann en un point n'est pas suffisante pour assurer l'existence de la dérivée d'une fonction à ce point.

(f dérivable en z_0) ⇒(les équations de Cauchy Riemann sont vérifiées en z_0).

(les équations de Cauchy Riemann ne sont pas vérifiées en z_0) ⇒(f n'est pas dérivable en z_0).

Maintenant, nous donnons une condition suffisante pour la dérivabilité de $f(z)$ en un point $z_0 = (x_0, y_0)$.

Le théorème d'incrémentation pour les fonctions de deux variables:

Supposons que les dérivées partielles de premier ordre de $f(x, y)$ soient définies dans une région ouverte R contenant le point (x_0, y_0) et que f_x et f_y soient continues en (x_0, y_0). Alors le changement,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\,(x_0, y_0)$$

dans la valeur de f résultant du déplacement de (x_0, y_0) vers un autre point $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ dans R vérifie une équation de la forme

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

dans lequel $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ quand $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Théorème 2.5. 2

Soit la fonction $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ définie dans tout ε-voisinage d'un point $z_0 = x_0 + i\,y_0$, et supposons que

(a) les dérivées partielles de premier ordre des fonctions u et v, par rapport à x et y, existent partout dans le voisinage;
(b) ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad en\ (x_0, y_0).$$

Alors $f'(z_0)$ existe, sa valeur étant

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

Preuve.
Soit $\Delta z = \Delta x + i\Delta y, o\grave{u}\ 0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Puis on écrit

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v,$$

où

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

Et

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

Puisque les dérivées partielles de premier ordre de u et v sont continues au point (x_0, y_0), selon le théorème d'incrémentation pour les fonctions de deux variables, on a

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

et

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et $\varepsilon_4 \rightarrow 0$ quand $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ dans le $z -$ plan.

Maintenant, $\Delta w = \Delta u + i\,\Delta v$, alors

$$\Delta w = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$+i\big(v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y\big)$$

Puisque les équations de Cauchy – Riemann sont satisfaits en (x_0, y_0), cela implique que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x\,(x_0, y_0) + i v_x\,(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

Mais, $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ et $|\Delta y| \leq |\Delta z|$,

nous avons $|\frac{\Delta x}{\Delta z}| \leq 1$ et $|\frac{\Delta y}{\Delta z}| \leq 1$, de sorte que

$$|(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}| \leq |\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_3| \leq |\varepsilon_1| + |\,\varepsilon_3|$$

Et

$$|(\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}| \;\leq\; |\varepsilon_2 + i\,\varepsilon_4| \;\leq\; |\varepsilon_2| + |\,\varepsilon_4|$$

Ainsi, comme $\Delta z \;\rightarrow\; 0$, nous obtenons

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

Exercice 2

Montrer que $f(z) = e^z$ est dérivable partout dans le plan complexe.

Solution.

Nous avons

$$f(z) = e^z = e^{x+i\,y} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y + \;i \sin y) = \;u + \;i\,v$$

Alors

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y \quad \text{et} \quad v_y = e^x \cos y,$$

tous sont continus et satisfont partout les équations de Cauchy-Riemann.

Donc $f'(z)$ existe partout et

$$f'(z) = u_x + \;i v_x = \;e^x \cos y + \;i e^x \sin y \;=\; e^z \;=\; f(z),$$

pour tout z.

Le théorème suivant donne la forme polaire des équations de Cauchy-Riemann.

Théorème 2.5. 3

Soit la fonction

$$f(z) = u(r, \theta) + i\,v(r, \theta)$$

définie dans tout ε–voisinage d'un point non nul $z_0 \;=\; r_0 exp\;(i\theta_0)$, et supposons que
(a) les dérivées partielles de premier ordre des fonctions u et v, par rapport à r et θ, existent partout dans le voisinage;
(b) ces dérivées partielles sont continues en (r_0, θ_0) et satisfont la forme polaire

$$ru_r = v_\theta,\ \ u_\theta = -rv_r$$

des équations de Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0) *.*

Alors $f'(z_0)$ *existe, sa valeur est*

$$f'(z_0) = e^{-i\,\theta}\,(u_r + iv_r) = \frac{1}{r}e^{-i\,\theta}(v_\theta - iu_\theta)$$

où le côté droit doit être évalué en (r_0, θ_0)*.*

Exercice 3

Montrer que $f(z) = 1/z$ *est dérivable en tout point* $z \neq 0$ *et trouver sa dérivée.*

Solution.

En écrivant sous la forme polaire, on a pour $z \neq\ 0$,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\sin\theta) = u + i\,v.$$

Ainsi,

$$u(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \text{ et } v\,(r,\theta) = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Par conséquent,

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \text{ et } u_\theta\ = -\ \frac{\sin\theta}{r}\ = -rv_r.$$

⇒Les dérivées partielles sont continues et les équations de Cauchy – Riemann sont satisfaites en tous $z \neq\ 0$. La dérivée de f existe donc en tout $z \neq\ 0$ et

$$f'(z) = \ e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} +\ i\,\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} \quad = -\frac{1}{z^2}$$

lorsque $z \neq\ 0$.

6 - Fonctions holomorphes (analytique)

Définition

Une fonction complexe $w = f(z)$ est dite ***holomorphe*** *en un point z_0 si f est dérivable en z_0 et en tout point dans un voisinage de z_0.*

Remarques

- L'holomorphie en un point n'est pas la même chose que la dérivabilité en un point.
- Notez que si f est holomorphe en un point z_0, il doit être holomorphe à chaque point situé dans un voisinage de z_0.
- Une fonction f est holomorphe dans un ensemble ouvert si elle a une dérivée partout dans cet ensemble.
- Notez que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe en chaque point différent de zéro dans le plan complexe fini. Mais la fonction $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe en aucun point puisque sa dérivée n'existe qu'au point $z = 0$.
- **Une fonction entière** est une fonction holomorphe en chaque point du plan complexe tout entier.
- Comme la dérivée d'un polynôme existe partout, il s'ensuit que chaque polynôme est une fonction entière.
- De même, e^z, $\sin z$, $\cos z$ sont des fonctions entières.
- Si une fonction f n'est pas holomorphe en un point z_0 mais est holomorphe en un point de chaque voisinage de z_0, alors z_0 est appelé un **point singulier**, ou **singularité**, de f.
  Par exemple, le point $z = 0$ est un point singulier de la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, où, comme la fonction $f(z) = |z|^2$, n'a pas de points singuliers puisqu'elle n'est nulle part holomorphe.
- Une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'une fonction soit holomorphe dans un domaine D est clairement la continuité de f tout au long de D.
- La satisfaction des équations de Cauchy-Riemann est également nécessaire, mais non suffisante.

Les théorèmes 2 et 3 fournissent des conditions suffisantes pour l'holomorphie dans D.

Critère de non-holomorphie

Si les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites en tout point z d'un domaine D, alors la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ne peut pas être holomorphe dans D.

Exemple 12 (fonction holomorphe nulle part)

Montrer que la fonction complexe $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ n'est holomorphe en aucun point.

Solution

Nous identifions $u(x,y) = 2x^2 + y$ et $v(x,y) = i(y^2 - x)$. De

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

on voit que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ mais que l'égalité $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ n'est satisfaite que sur la droite $y = 2x$.

Cependant, quel que soit le point z de la droite, il n'existe pas de disque de voisinage ou ouvert autour de z dans lequel f est dérivable en chaque point.

Nous concluons que f n'est nulle part holomorphe.

Exemple 13: (fonction dérivable sur une droite)
Dans l'exemple 12, nous avons vu que la fonction complexe $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ n'était nulle part holomorphe, mais les équations de Cauchy-Riemann étaient satisfaites sur la droite $y = 2x$

Mais puisque les fonctions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \ \text{ et } \ \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

sont continues en tout point, il en résulte que f est dérivable sur la droite $y = 2x$.

De plus, nous voyons que la dérivée de f aux points de cette droite est donnée par

$$f'(z) = 4x - i = 2y - i$$

Critère d'holomorphie

> *Supposons que les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues et ont des dérivées partielles continues du premier ordre dans un domaine D.*
>
> *Si u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann en tous les points de D, alors, La fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D.*

Exemple 14
Pour la fonction $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, les fonctions réelles

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ \text{ et } \ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

sont continues sauf là où $x^2 + y^2 = 0$ c'est-à-dire au point $z = 0$.

De plus, les quatre premières dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

sont continues sauf au point $z = 0$. Finalement on voit que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites sauf au point $z = 0$.

Nous concluons donc du théorème que f est holomorphe dans tout domaine D qui ne contient pas le point $z = 0$.

Remarques

- Notez que la multiplication par une constante d'une fonction holomorphe est holomorphe.
- Si deux fonctions sont holomorphes dans un domaine D, leur somme et leur produit sont tous deux holomorphes dans D.
- De même, leur quotient est holomorphe dans D, à condition que la fonction dans le dénominateur ne soit nulle en aucun point de D.
- En particulier, le quotient $\frac{P(z)}{Q(z)}$ de deux polynômes est holomorphe dans tout domaine dans lequel $Q(z) \neq 0$.
- À partir de la règle de chaîne pour la dérivée d'une fonction composée, nous voyons qu'une composition de deux fonctions holomorphes est holomorphe.

Exercice 4

Si $f'(z) = 0$ partout dans un domaine D, montrez que $f(z)$ doit être constant sur D.

Solution.

Puisque $f'(z) = 0$ existe partout dans D, $f(z) = u + iv$ est holomorphe dans D.

Par conséquent, u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann et $f'(z) = u_x + iv_x$.

Mais, $f'(z) = 0$, $z \in D$, nous avons $u_x = 0$, $v_x = 0$.

Par les équations de Cauchy –Riemann, nous obtenons $u_y = 0$, $v_y = 0$.

Cela montre que u et v sont tous deux indépendants de x et y, c'est-à-dire que u et v sont des constantes dans D et par suite $f\ (z = u + iv)$ est constante dans D.

Exercice 5.

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe à valeurs réelles dans un domaine D, montrez que $f(z)$ doit être constante dans D.

Solution.

Soit $f(z) = u + iv$. Puisque $f(z)$ a une valeur réelle en D, nous avons $v = 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0$. Puisque $f(z)$ est analytique dans D, u et v satisfait les équations de Cauchy-Riemann, nous obtenons donc $u_x = 0, u_y = 0$. Cela montre que u est une constante dans D. Ainsi, toute fonction holomorphe à valeur réelle dans un domaine D est constant en D.

Exercice 6

Si $f(z)$ et $\overline{f(z)}$ sont toutes deux des fonctions holomorphe dans un domaine D, montrez que $f(z)$ doit être constante dans D.

Solution

Soit $f(z) = u + iv$. Alors,

$$\overline{f(z)} = u - iv = U + iV \Rightarrow U = u \text{ et } V = -v.$$

Comme $f(z)$ est holomorphe en D, nous avons les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \text{ et } u_y = -v_x.$$

Puisque $\overline{f(z)} = U + iV$ est holomorphe en D, nous avons $U_x = V_y \; et \; U_y = -V_x$.

Puisque $U = u \; et \; V = -v$, cela implique que

$$u_x = -v_y \text{ et } u_y = v_x \Rightarrow u_x = 0, v_x = 0.$$

Cela montre que

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0.$$

Par conséquent, Problème 4, $f(z)$ est une constante en D.

7 - Fonctions harmoniques

Il existe de nombreuses applications importantes de l'analyse complexe aux problèmes du monde réel. Celles étudiées dans ce chapitre sont liées à l'équation différentielle fondamentale

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

connu sous le nom d'équation de Laplace.

Cette équation aux équations partielles modélise des phénomènes en ingénierie et en physique, tels que les distributions de température en régime permanent, les potentiels électrostatiques et le débit de fluide, pour n'en nommer que quelques-uns.

Une fonction réelle qui satisfait l'équation de Laplace est dite harmonique.

Il existe une relation intime entre les fonctions harmoniques et analytiques.

Pour illustrer une application, considérons une plaque bidimensionnelle en matériau homogène, avec des surfaces latérales isolées. Nous représentons cette plaque par une région Ω dans le plan complexe (voir figure 6.1).

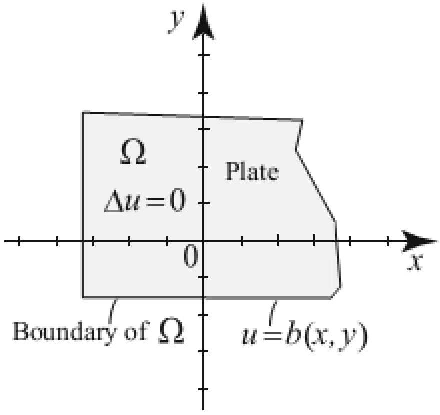


Fig. 7.1 La distribution de la température à l'état stationnaire d'une plaque répond à l'équation de Laplace.

Supposons que la température des points situés à la limite de la plaque soit décrite par la fonction b (x, y) qui ne change pas avec le temps. En thermodynamique, la température à l'intérieur de la plaque atteindra finalement et restera à une distribution d'équilibre u (x, y), connue sous le nom de distribution de température à l'état d'équilibre, qui satisfait l'équation Δ u = 0.

Le laplacien doit son nom au grand mathématicien et physicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Cet opérateur parut pour la première fois dans un mémoire de Laplace en 1784, dans lequel il détermina complètement l'attrait d'un sphéroïde sur les points extérieurs. Le laplacien d'une fonction mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et la valeur moyenne de la fonction dans un voisinage de ce point. Ainsi, une fonction qui ne varie pas brusquement a un très petit laplacien. Les fonctions harmoniques ont un laplacien nul; ils varient de manière très régulière. Des exemples de telles fonctions incluent la distribution de la température dans une plaque, le potentiel de la force d'attraction due à une sphère ou la fonction qui donne la luminosité des couleurs dans une image.

Définition 7.1.1.

Une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble ouvert Ω du plan complexe est appelée harmonique si elle a des dérivées partielles continues du premier et du second ordre dans Ω et satisfait l'équation de Laplace.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad pour\ tout\ (x, y) \in \Omega$$

Exemple, $f(x, y) = x^2 - y^2$ est clairement une fonction harmonique dans n'importe quel domaine du plan xy.

Théorème **7.1.2.**

Notez que, si une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un domaine D, ses fonctions composantes u et v sont harmoniques dans D.

Pour le voir, notez que par les équations de Cauchy - Riemann, nous avons $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

En les différenciant à nouveau avec x et y, nous obtenons $u_{xx} = v_{yx}$ et $u_{yy} = -v_{xy}$.

La continuité des dérivées partielles de u et v implique $v_{xy} = v_{yx}$.

Par conséquent, nous obtenons $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

De même, $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Cela montre que u et v sont harmoniques dans D.

Si deux fonctions u et v sont harmoniques dans un domaine D et que leurs dérivées partielles du premier ordre satisfont les équations de Cauchy-Riemann tout au long de D, alors v est considéré comme un conjugué harmonique de u.

On peut prouver que si une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un domaine D si et seulement si v est un conjugué harmonique de u.

Par exemple, puisque $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$ sont les parties réelle et imaginaire de la fonction entière $f(z) = z^2$, v est un conjugué harmonique de u dans tout le plan. Mais u ne peut pas être un conjugué harmonique de v puisque la fonction $2xy + i(x^2 - y^2)$ n'est holomorphe nulle part (Vérifiez cela!).

Exemple 15

(a) Vérifiez que la fonction $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ est harmonique dans tout le plan complexe.

(b) Trouvez la fonction conjugué harmonique de u.

Solution

(a) Des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy - 5, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

nous voyons que u satisfait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}= 6x - 6x = 0.$$

(b) Puisque la fonction harmonique conjuguée v doit satisfaire les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \ et \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} ,$$

nous devons avoir

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \ et \ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5. \qquad (3)$$

L'intégration partielle de la première équation dans (3) par rapport à la variable y donne

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$$

La dérivée partielle par rapport à x de cette dernière équation est $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x)$.
Lorsque ce résultat est substitué dans la deuxième équation de (3), nous obtenons $h'(x) = 5$, et ainsi $h(x) = 5x + C$, où C est une constante réelle. Par conséquent, le conjugué harmonique de u est

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C.$$

Exercice 7

Montrer que $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ est harmonique dans tout le plan et trouver un conjugué harmonique $v(x,y)$.

Solution

Nous avons $\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$.

Ainsi, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ alors u est harmonique.

Soit $v(x,y)$ le conjugué harmonique de u, de sorte que $f(z) = u + iv$ est holomorphe.
Par les équations de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y \ et \ u_y = -v_x$.

Mais $v_y = u_x = -6xy$ en intégrant cette équation w.r.t y, on obtient $v(x,y) = -3xy^2 + k(x)$.

En différenciant cette équation w.r.t x, nous obtenons $v_x = -3y^2 + k'(x)$. Mais

$$v_x = -u_y = -3y^2 + 3x^2 \Rightarrow k'(x) = 3x^2$$

En intégrant, on obtient $k(x) = x^3 + C$, où C est un nombre réel arbitraire, de sorte que

$$v(x,y) = -3xy^2 + x3 + C.$$

Exemple 16 (Fonctions harmoniques)

Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques dans les régions indiquées.

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2 \ sur \ \mathbb{C}$.

(b) $u(x,y) = e^x siny \ sur \ \mathbb{C}$.

(c) $u\,(x, y) \;=\; Argz\,(z \;=\; x \;+\; iy)\; sur\; la\; région\; \Omega \;=\; \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(d) $u\,(x, y) \;=\; ln\,|\,z\,| \;=\; ln\sqrt{x^2 \;+\; y^2}\;\; sur\; la\; région\, \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solution.

(a) Il n'est pas difficile de voir que u est harmonique ici par vérification directe de l'équation de Laplace, mais nous reconnaissons que $u(x, y) \;= x^2 - \; y^2$ est la partie réelle de la fonction entière

$$f(z) \;=\; z^2 \;=\; (x^2 - \; y^2) \;+\; 2ixy.$$

Ainsi, du théorème 7.1.2, nous concluons que u est harmonique sur $\mathbb{C}$.

(b) Reconnaissant que $u(x, y) \;=\; e^x siny$ est la partie imaginaire de toute la fonction e^z (corollaire 1.6.4), nous concluons du théorème 7.1.2 que u est harmonique sur $\mathbb{C}$.

(c) Nous avons $Arg\; z \;=\; Im\;(Log\; z)$, où $Log\; z \;=\; ln|z| \;+\; i\; Ar$gz est la branche principale du logarithme

Puisque $Logz$ est analytique sur Ω, nous concluons que $Argz$ est harmonique sur Ω, d'après le théorème 7.1.2.

(d) Nous avons besoin de deux fonctions analytiques différentes pour établir la revendication.

En faisant valoir que dans (c), il en résulte que $ln|z| \;=\; ln\sqrt{x^2 \;+\; y^2}$ est harmonique sur $\Omega \;= \; C \setminus (-\infty, 0]$, étant la partie réelle de $Log\; z$, qui est analytique sur $C \setminus (-\infty, 0]$.

Ceci établit que $ln|\; z\;|$ est harmonique sur la région désirée sauf sur l'axe x négatif, $(-\infty, 0)$.

Pour montrer que $ln|\; z\;|$ est harmonique sur $(-\infty, 0)$, on utilise $log\alpha z$, qui est une branche de $log\; z$ avec une branche coupée à angle α, avec $-\pi \;< \alpha \;< \pi$.

Il résulte que $log_\alpha z \;=\; ln\;|z| \;+\; arg_\alpha z$ et $log_\alpha z$ sont analytiques sauf à la coupure de branche et, en particulier, analytiques sur l'axe x négatif.

Par conséquent, sa partie réelle, $ln|z|$, est harmonique sur l'axe x négatif.

8 - Fonctions élémentaires

Dans cette section, nous examinons diverses fonctions élémentaires étudiées en analyse et définissons les fonctions correspondantes d'une variable complexe que nous allons détailler en annexes.

Fonction exponentielle complexe

Nous commençons par définir la fonction exponentielle complexe.

Soit $z = x + iy$. Alors, nous définissons **la fonction exponentielle complexe** comme

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Mais, par la formule d'Euler $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ où y doit être pris en radians.
Nous avons donc

$$\exp(z) = e^z \ = e^x(\cos y \ + \ i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = u + i\, v$$

Alors u et v ont des dérivées partielles du premier ordre continues qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann, montrant que e^z est une fonction entière et $(e^z)' = e^z$.

Notez également que e^z est périodique avec une période imaginaire pure $2\pi i$. Nous avons, $|e^z| = \ e^x \neq \ 0$, de sorte que $e^z \neq 0$ pour tout nombre complexe z. Aussi,

$$\arg e^z = y + 2n\pi \ , \quad (n = \ 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Fonction logarithmique complexe

Si z est un nombre complexe différent de zéro, nous définissons la **fonction logarithmique complexe** $\log z \ \ (ou, \ln z)$ comme l'inverse de la fonction exponentielle complexe. c'est-à-dire que nous avons

$$\log z \ = \ w = u + iv \text{ si } e^w = z.$$

En écrivant $z \ = \ re^{i\theta}$ avec $-\pi \ < \theta \leq \pi$ et $w \ = \ u \ + \ iv$, on obtient:

$$e^{u+\,iv} = re^{i\theta} \ \Rightarrow \ e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

de sorte que $e^u = r$ and $v = \theta + 2n\pi$ (puisque $e^{i2n\pi} = 1$ pour tout entier n.)

Donc, $u = \ln r$ et $v = \theta + 2n\pi$ pour $n \ = \ 0, \pm 1 \ \pm \ 2, \dots.$

Ainsi, $\log z \ = \ln r \ + \ i\,(\theta + 2n\pi)$ où $\theta = \arg z \ , n \ = \ 0, \pm 1 \ \pm \ 2, \dots.$

Puisque $\arg z$ a une infinité de valeurs, la fonction logarithmique complexe est également une fonction une fonction à valeurs multiples.

Si on laisse α désigner un nombre réel et restreindre la valeur de $\theta = \arg z$ dans la définition de $\log z$ ci-dessus de sorte que $\alpha \ < \theta \ < \alpha \ + \ 2\pi$, la fonction

$$\log z \ = \ln r \ + \ i\theta, (r > \ 0, \qquad \alpha \ < \theta \ < \alpha \ + \ 2\pi),$$

avec les composantes

$$u\,(r, \theta) = \ln r \quad et \quad v(r, \theta) = \theta,$$

est à valeur unique et continue dans le domaine indiqué.

La fonction $\log z = \ln r + i\theta$ définie ci-dessus est continue et également analytique dans tout le domaine $r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, car les dérivées partielles de premier ordre de u et v y sont continues et satisfont à la forme polaire des équations de Cauchy-Riemann.

Aussi,

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-i\,\theta}\,(u_r + iv_r) = e^{-i\,\theta}\left(\frac{1}{r} + i\,0\right) = \frac{1}{rei\theta} = \frac{1}{z}\ ,$$

$$\text{où } |z| > 0, \qquad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi.$$

La **valeur principale** de $\log z$, notée $\operatorname{Log} z$ est la valeur correspondant à la valeur principale de $\arg z$, c'est-à-dire,

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z),$$

où $\operatorname{Arg} z$ est la valeur de $\arg z$ comprise entre $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Une **branche** d'une fonction à valeurs multiples est une fonction à valeur unique F qui est analytique dans un domaine à chaque point z et dont la valeur $F(z)$ est l'une des valeurs de f.

L'exigence d'analyticité empêche F de prendre une sélection aléatoire des valeurs de f. Notez que pour chaque α fixe, la fonction à valeur unique

$$\log z = \ln r + i\theta, \qquad (r > 0, \qquad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

est une branche de la fonction à valeurs multiples $\log z = \ln r + i \arg z$.

Notez que la fonction

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta\ , \qquad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

est **la branche principale** de $\log z$.

Une **coupe de branche** est une partie d'une ligne ou d'une courbe qui est introduite afin de définir une branche F d'une fonction à valeurs multiples f.

Les points de la branche coupée pour F sont des points singuliers de F, et tout point commun à toutes les coupes de branche de f s'appelle un **point de branchement**.

L'origine et le rayon $\theta = \alpha$ constituent la branche coupée pour la branche

$$\log z = \ln r + i\theta, \qquad (r > 0, \qquad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

de la fonction logarithmique. La branche coupée pour la branche principale de $\log z$ est constituée de l'origine et du rayon $\theta = \pi$. L'origine est évidemment un point de branchement pour les branches de la fonction logarithmique à valeurs multiples.

Nous définissons maintenant **les exposants complexes**. Lorsque $z \neq 0$ et que l'exposant est un nombre complexe quelconque, la fonction z^c est définie au moyen de l'équation

$$z^c = e^{c \log z},$$

où $\log z$ désigne la fonction logarithmique à valeurs multiples. Donc, en général, z^c a une valeur multiple. Pour obtenir une valeur unique pour z^c, nous remplaçons la fonction logarithmique à valeurs multiples par une branche particulière de $\log z$.

La **valeur principale** de z^c est la valeur de z^c lorsque $\log z$ est remplacé par $\mathrm{Log}\, z$ dans la définition de z^c, c'est-à-dire que la valeur principale de $z^c = e^{c\, \mathrm{Log}\, z}$.

Exercice 8.

Résoudre pour z, l'équation $e^z = 1 + i$.

Solution.

En forme polaire, nous avons $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi 4}$. Soit $z = x + i\, y$. Donc,

$$e^z = e^x e^{iy} = \sqrt{2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\Rightarrow e^x = \sqrt{2} \text{ et } y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\Rightarrow x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2 \; et \; y = \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Par conséquent,

$$z = x + i\, y = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Exercice 9.

Montrer que $exp\,(z + \pi\, i) = -exp\, z$.

Solution.

On a

$$exp(z + \pi\, i) = e^{z+\pi i} = e^z e^{i\pi} = e^z\,(\cos\pi + i\sin\pi) = e^z\,(-1 + i0) = -\,e^z = -exp\, z.$$

Exercice 10.

Trouvez la valeur de $log\,(-1 - \sqrt{3}i)$.

Solution.

Écriture sous forme polaire,

$$-1 - \sqrt{3}\, i = 2e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$$

Donc,

$$\log(-1 - \sqrt{3}\, i) = \ln 2 + i\,(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi), \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\Rightarrow \log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n - \frac{1}{3})\,\pi\, i, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Exercice 11.

Montrer que

$$Log\,(-ie\;)\;=\;1\;-\frac{\pi}{2}i.$$

Solution.

Nous avons,

$$\mathrm{Log}\,(-ie)\;=\;\ln|-ie|+i(\mathrm{Arg}\,(-ie))$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}\,(-ie)\;=\;\ln e\;+\;i\,(-\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}\,(-ie)=1+i\,(-\frac{\pi}{2})=\;1\;-\;\frac{\pi}{2}i.$$

Exercice 12.

Trouvez la valeur principale de i^i.

Solution.

Nous avons, la valeur principale de $i^i=\;e^{i\,\mathrm{Log}\,i}$. Mais,

$$\mathrm{Log}\,i=\ln|\,i\,|+i\,\mathrm{Arg}\,(i)=0+i\frac{\pi}{2}\;=\;\frac{\pi}{2}i.$$

Par conséquent, la valeur principale de

$$i^i=e^{i\,\mathrm{Log}\,i}=e^{i(i\frac{\pi}{2})}\;=\;e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Nous définissons maintenant **les fonctions trigonométriques** et **hyperboliques** d'une variable complexez.

Nous définissons les fonctions **sinus** et **cosinus** d'une variable complexe z comme suit:

$$\sin z\;=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\quad et\,\cos z\;=\;\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Ces fonctions sont entières car ce sont des combinaisons linéaires de toutes les fonctions e^{iz} et e^{-iz}.

D'après les définitions, il en résulte que

$$\frac{d}{dz}\sin z=\cos z\;\text{ et }\;\frac{d}{dz}\cos z\;=-\sin z.$$

Les quatre autres fonctions trigonométriques sont définies en termes de fonctions sinus et cosinus comme dans le cas réel.

Le **sinus hyperbolique** et le **cosinus hyperbolique** d'une variable complexe z sont définis comme suit:

$$\sinh z\;=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\quad\text{et}\cosh z\;=\;\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}.$$

Puisque e^z et e^{-z} sont entières, $\sinh z$ et $\cosh z$ sont des fonctions entières.

De plus,

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z \text{ et } \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$$

La **tangente hyperbolique** de z est définie au moyen de l'équation

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

et est analytique dans tous les domaines dans lesquels $\cosh z \neq 0$.

Les fonctions $\coth z$, $\operatorname{sech} z\ et\ \operatorname{csch} z$ sont les inverses de $\tan h\ z$, $\cos h\ z\ et\ \sinh z$, respectivement.

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont étroitement liées aux fonctions trigonométriques comme suit:

$$-i\sinh(iz) = \sin z, \qquad cosh\ (iz) = \cos z,$$

$$-i\sin(iz) = \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z.$$

Afin de définir la fonction sinus inverse $\sin^{-1}z$, nous écrivons $w = \sin^{-1}z$ lorsque $z = \sin w$.

c'est-à-dire, $w = \sin^{-1}z$ lorsque

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow (e^{iw})^2 - 2i\,z\,(e^{iw}) - 1 = 0,$$

qui est une équation quadratique en e^{iw}, et en résolvant pour e^{iw}, nous obtenons

$$e^{iw} = i\,z + (1 - z^2)^{1/2} \text{ où } (1 - z^2)^{1/2}$$

est une fonction à valeur double de z.

En prenant des logarithmes des deux côtés nous obtenons

$$w = \sin^{-1}z = -i\log\left[i\,z + (1 - z^2)^{1/2}\right].$$

Comme la fonction logarithmique est à valeurs multiples, nous voyons que $\sin^{-1}z$ est une fonction à valeurs multiples, avec une infinité de valeurs en chaque point z.

De même, on peut trouver que

$$cos^{-1}z = -i\log\left[z + i\,(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

et que

$$tan^{-1}z = \frac{i}{2}log\frac{i + z}{i - z}.$$

Les fonctions $cos^{-1}z$ et $tan^{-1}z$ ont également des valeurs multiples.

De manière similaire, des fonctions hyperboliques inverses peuvent être trouvées de manière correspondante.

Il se trouve que

$$\sinh^{-1} z = \log\left[z + (z^2 + 1)^{1/2}\right], \qquad \cosh^{-1} z = \log\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right],$$

et

$$tanh^{-1} z = \frac{1}{2} log \frac{1 + z}{1 - z}.$$

III - Intégration complexe

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les dérivés de fonctions complexes. Nous passons maintenant au problème de l'intégration de fonctions complexes. La théorie que nous allons apprendre est élégante, puissante et un outil utile pour les physiciens et les ingénieurs. Il se connecte également largement avec d'autres branches des mathématiques. Par exemple, bien que les idées présentées ici appartiennent au domaine général des mathématiques appelé analyse, nous verrons qu'une application de celles-ci nous en fournit l'une des preuves les plus simples du théorème fondamental de l'algèbre.

L'intégration complexe nous aide à évaluer certaines intégrales réelles et imprécises, en les transformant en intégration d'une fonction complexe appropriée autour d'un chemin ou d'un contour d'intégration particulier, où les méthodes habituelles d'intégration réelle échouent. En outre, la théorie de l'intégration complexe est utile pour établir certaines propriétés de base des fonctions analytiques.

Nous verrons que les intégrales des fonctions analytiques se comportent bien et que de nombreuses propriétés, du calcul, se retrouvent dans le cas complexe. Nous introduisons l'intégrale d'une fonction complexe en définissant l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes d'une variable réelle.

1 - Intégrales définies

Soit w une fonction complexe d'une variable réelle, on peut alors écrire

$w(t) = u(t) + i\, v(t)$, où u et v sont des fonctions de la variable t.

Alors, la dérivée $w'(t)$ en un point t est définie par

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t),$$

à condition que chacune des dérivées u' et v' existe en t.

L'intégrale définie de $w(t)$ sur un intervalle $a \leq t \leq b$ est définie par

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)\, dt \; + \; i \int_a^b v(t)\, dt,$$

à condition que chacune des intégrales de droite existe. Ainsi,

$$Re\,[\int_a^b w(t)dt] \;=\; \int_a^b Re\,[w(t)]\,dt \quad \text{et} \quad Im\,[\int_a^b w(t)dt] \;= \int_a^b Im\,[w\,(t)]\,dt.$$

Remarque.
L'existence des intégrales de u et v dans la définition ci-dessus est assurée si ces fonctions sont continues par morceaux sur l'intervalle $a \leq t \leq b$.

Les propriétés suivantes sont valables pour les intégrales définies complexes.

1. $\int_a^b kw(t)\,dt \;=\; k\int_a^b w(t)\,dt$, *pour toute constante complexe k,*

2. $\int_a^b [w_1(t) + w_2\,(t)]\, dt \;=\; \int_a^b w_1(t)dt + \int_a^b w_2(t)dt$, *pour toute fonction complexe* w_2 *et* w_2
3. $\int_a^b w(t)\, dt \;=\; -\int_b^a w(t)\, dt$,
4. $\int_a^b w(t)\, dt \;=\; \int_a^c w(t)\, dt \;+\; \int_c^b w(t)\, dt$, où $a \;< c\; < b$,
5. *si* $w\,(t) \;=\; u\,(t) \;+\; iv\,(t)$ *et* $W\,(t) \;=\; U\,(t) \;+\; iV\,(t)$ *sont continus sur l'intervalle* $a \leq t \;\leq b$, *et si* $W'\,(t\,) = w(t)$ *sur* $a \leq t \;\leq b$, *alors* $U'(t) = \;u(t)$ *et* $V'(t) = v(t)$ *et donc* $\int_a^b w(t)\, dt \;=\; W(b) \;- W(a)$. *(Théorème fondamental du calcul).*

Exercice 13.

Évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\, dt.$

(b) $\int_0^1 (1+it)^2\, dt$

Solution.

Nous avons

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt \;= \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \;= -i\,\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\,\right) = \;\frac{1}{\sqrt{2}} \;+\; i\,(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$

(b) $\int_0^1 (1+it)^2\, dt \;= \int_0^1 (1-t^2)\, dt \;\;+\; i\int_0^1 2t\, dt \;=\; \frac{2}{3} \;+\; i.$

Exercice 14.

Si m et n sont des entiers, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta \;= \begin{cases} 0 & lorsque\; m \neq\; n \\ 2\pi & lorsque\; m \;=\; n \end{cases}.$$

Solution.

Tout d'abord, supposons que $m \neq\; n$, Alors

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta \;= \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{e^{i(m-n)\theta}}{i(m-n)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i(m-n)2\pi} - e^0}{i(m-n)} \;=\; 0$$

Maintenant, considérez m = n, alors

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-im\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Contours

Définition 3.1.1.

- On dit qu'un ensemble de points $z = (x, y)$ dans le plan complexe est un **arc** si

$$x = x\,(t), y = y\,(t),\;\; (a \leq t \leq b),$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues du paramètre réel t.

Ainsi, un arc C dans le plan complexe est une fonction continue de $[a, b]$ au plan complexe et est décrite par l'équation $z = z(t) = x(t) + iy(t),\ (a \leq t \leq\ b)$ Le sens des valeurs croissantes de t induit une orientation de C.

- L'arc est dit être un **arc simple**, ou un **arc de Jordan**, s'il ne se croise pas. Ainsi, C est simple si $z(t1) \neq z\ (t2)$ lorsque $t_1 \neq t_2$.
- Lorsque l'arc C est simple, à l'exception du fait que $z(b) = z(a)$, on dit que C est une **courbe fermée simple** ou une **courbe de Jordan**.

Par exemple, un cercle est une simple courbe fermée, alors qu'une courbe en forme de 8 ne l'est pas.

- Une courbe est **orientée positivement** dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exemple 4

(a) Le cercle unitaire $z = e^{i\theta}, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ autour de l'origine est une courbe fermée simple, orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

(b) Le cercle $z\ =\ z_0\ +\ Re^{i\theta}, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, centré au point z_0 et de rayon R, est également une courbe simple fermée orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

(c) L'arc donné par $z(\theta) = e^{-i\theta}, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ représente le cercle unitaire traversé dans le sens des aiguilles d'une montre.

(d) L'équation $z(\theta) = e^{i2\theta}, (0\ \leq \theta\ \leq 2\pi)$ représente le cercle unité parcourue deux fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Définition 3.1.2.

Considérons un arc C représenté par l'équation $z\ =\ z\ (t)\ =\ x\ (t)\ +\ i\ y\ (t), (a \leq t\ \leq b)$.

- *Si les composantes* $x'(t)$ *et* $y'(t)$ *de la dérivée* $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *de* $z\ (t)$ *sont continues sur tout l'intervalle* $[a, b]$ *, on dit alors que l'arc C est un* ***arc différentiable****.*
- *Dans ce cas, la fonction réelle* $|z'(t)| =\ \sqrt{[x\ '(t)]\ ^2 +\ [y'\ (t)]^2}$ *est intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$ *et* $\int_a^b |z'(t)|\ dt$ *donne la longueur L de C.*
- *Un arc C représenté par l'équation* $z\ =\ z\ (t)\ =\ x\ (t)\ +\ iy\ (t), (a \leq t \leq b)$ *est dit un* ***arc lisse*** *si la dérivée* $z'(t)$ *est continue sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et non nul tout au long de l'intervalle ouvert* (a, b)*. Un arc constitué d'un nombre fini d'arcs lisses joints bout à bout est appelé un* ***contour****, ou un* ***arc lisse par morceaux****.*
  Par conséquent, si $z = z(t)$ *représente un contour, alors* $z(t)$ *est continu et sa dérivée* $z'(t)$ *est continue par morceaux.*
- *Lorsque seules les valeurs initiale et finale de* $z(t)$ *sont identiques, un contour* C *est appelé un* ***contour fermé simple****. Les cercles, les frontières d'un triangle ou d'un rectangle pris dans une direction spécifique sont des exemples de simples contours fermés.*
  La longueur d'un contour ou d'un simple contour fermé est la somme des longueurs des arcs lisses constituant le contour.

- *Les points de toute courbe fermée simple ou contour fermé simple C sont des points frontières de deux domaines distincts, dont l'un est l'intérieur de C et est borné. L'autre, qui est l'extérieur de C, est non borné. C'est ce qu'on appelle le* ***théorème de la courbe de Jordan****.*

Exercice 15.

Exprimez les courbes suivantes sous forme paramétrique.

(a) *La ligne polygonale consistant en un segment de droite de* 0 à $1 + i$ *suivi de un de* $1 + i$ à $2 + i$.

(b) *La courbe* $y = \frac{1}{x}$ *de* $(1,1)$ à $(4,\frac{1}{4})$.

(c) *La moitié supérieure du cercle* $|z + 3 - i| = 5$ *dans le sens antihoraire.*

Solution.

(a) L'équation $z(t) = t + it$, lorsque $0 \leq t \leq 1$, $z(t) = t + i$, lorsque $1 \leq t \leq 2$ représente l'arc constitué d'un segment de droite de 0 à $1 + i$ suivi d'un autre de $1 + i$ à $2 + i$, et est un simple arc.

(b) L'équation $z(t) = t + \frac{1}{t}i, 1 \leq t \leq 4$ représente la courbe $y = \frac{1}{x}$ de $(1,1)$ à $(4,\frac{1}{4})$.

(c) L'équation $z(\theta) = (-3 + i) + 5e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$ représente la moitié du cercle supérieure $|z + 3 - i| = 5$ dans le sens antihoraire.

Intégrales de contour

Nous discutons maintenant des intégrales des fonctions à valeurs complexes f de la variable complexe z.

Une telle intégrale est définie en fonction des valeurs $f(z)$ le long d'un contour donné C, partant d'un point $z = z_1$ jusqu'à un point $z = z_2$ dans le plan complexe.

Une telle intégrale s'appelle une **intégrale de ligne**, elle est notée $\int_C f(z)\,dz$ et sa valeur dépend en général du contour C ainsi que de la fonction f.

Soit $z = z(t) = x(t) + iy(t), (a \leq t \leq b)$ représente un contour C et supposons que $f(z)$ est défini sur C. Nous supposons également que $f[z(t)]$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ et dans ce cas nous disons que la fonction $f(z)$ est continuellement par morceaux sur C. Alors, **l'intégrale de ligne**, ou **l'intégrale de contour**, de f le long de C est définie comme

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$$

Puisque C est un contour, $z'(t)$ est aussi continuellement par morceaux sur $[a, b]$; et ainsi, l'existence de l'intégrale ci-dessus est assurée.

De la définition des intégrales de ligne, il est clair que

$\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, pour k une constant complexe.

$$\int_C (f(z)+g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$$

pour toutes fonctions complexes f et g définies sur C.

Aussi, si $-C$ désigne le même ensemble de points de C, mais traversé dans le sens inverse, alors

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

Considérons maintenant un chemin C constitué d'un contour C_1 de z_1 à z_2 suivi d'un contour C_2 de z_2 à z_3 tel que le point initial de C_2 soit le point final de C_1. Alors,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Ici, le contour C est la somme des courbes C_1 et C_2 et est noté $C_1 + C_2$.

Exercice 16

Evaluez l'intégrale $\int_C \bar{z}dz$, où C est la moitié droite du cercle $|z| = 2$, de $-2i$ à $2i$.

Solution.

L'équation pour C est donnée par $z(\theta) = 2e^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{2e^{i\theta}}\left(2e^{i\theta}\right)'d\theta = 4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta}e^{i\theta}d\theta = 4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4\pi i$$

Remarque.

Dans le problème ci-dessus, notez que $z\bar{z} = |\, z\,|^2 = 4$ sur C, de sorte que

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \frac{1}{4}\int_C \bar{z}dz = \pi i.$$

Exercice 17.

Intégrez $\frac{1}{z}$, autour de C, le cercle unité $|z| = 1$, pris dans le sens antihoraire.

Solution.

L'équation pour C est donnée par $z(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Par conséquent,

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\left(e^{i\theta}\right)'d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Borne supérieure de la valeur absolue des intégrales de contour

Nous discutons maintenant d'un théorème qui nous aide à obtenir une borne supérieure pour le module d'une intégrale de contour $\int_C f(z)\,dz$, sans évaluer l'intégrale.

Lemme 3.1.3.

Si $w(t)$ est une fonction à valeurs complexes continue par morceaux définie sur un intervalle $a \leq t \leq b$, alors

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt.$$

Théorème 3.1.4.

Soit C un contour de longueur L, et supposons qu'une fonction $f(z)$ soit continue par morceaux sur C. Si M est une constante non négative telle que $|f(z)| \leq M$ pour tous les points z sur C, alors

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML.$$

Exercice 18.

Recherchez une borne supérieure $\left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right|$, où C est l'arc de cercle $|z| = 2$ de $z = 2$ à $z = 2i$, sans évaluer l'intégrale.

Solution.

Ici, la longueur de C est π. Aussi le long de C,

$$|z + 4| \leq |z| + 4 = 6, \text{et } |z^3 - 1| \geq ||z|^3 - 1| = 7$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{z + 4}{z^3 - 1} \right| = \frac{|z + 4|}{|z^3 - 1|} \leq \frac{6}{7}$$

Ainsi, selon le théorème 2.1.4,

$$\left| \int_C \frac{z + 4}{z^3 - 1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}$$

Exercice 19.

Si C est la limite du triangle avec les sommets aux points $0, 3i$ et -4, orientés dans le sens antihoraire, montrez que $\left| \int_C (e^z - \bar{z})\, dz \right| \leq 60$, sans évaluer l'intégrale.

Solution.

Ici, la longueur L de C est la somme des longueurs des côtés du triangle, et donc

$$L = 3 + 4 + 5 = 12.$$

Nous avons, $|e^z - \bar{z}| \leq |e^z| + |\bar{z}|$. Le long de C, $|e^z| = e^x \leq 1$ et $|\bar{z}| \leq 4$.

Par conséquent, $|e^z - \bar{z}| \leq 1 + 4 = 5$. Ainsi, selon le théorème 2.1.4,

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z})dz \right| \leq 5.12 = 60.$$

2 - Théorèmes sur l'intégration complexe

Nous énonçons maintenant un théorème contenant une extension du théorème fondamental du calcul qui simplifie l'évaluation de nombreuses intégrales de contour.

Cette extension implique le concept de primitive d'une fonction continue $f(z)$ sur un domaine D, c'est-à-dire une fonction $F(z)$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout z dans D.

Notez qu'une primitive est une fonction analytique et qu'une primitive d'une fonction donnée $f(z)$ est unique, à une constante additive près. (Ceci est dû au fait que la dérivée de la différence $F(z) - G(z)$ de deux tels primitives est égale à zéro et qu'une fonction analytique dont la dérivée est nulle dans tout le domaine D est une constante dans D.)

Théorème 3.2.1.

Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit continue sur un domaine D. Si l'une des affirmations suivantes est vraie, les autres le sont également:

(a) $f(z)$ a une primitive $F(z)$ dans tout D,

(b) les intégrales de $f(z)$ le long de contours appartenant entièrement à D et s'étendant de tout point fixe z_1 à tout point fixe z_2 ont toutes la même valeur, à savoir

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1), \text{ où } F(z) \text{ est la primitive de } f(z),$$

(c) les intégrales de $f(z)$ autour de contours fermés appartenant entièrement à D ont toutes la valeur zéro.

Remarque.

Notons que le théorème 2.2.1 ne prétend pas que ces affirmations sont vraies pour une fonction donnée $f(z)$. Il dit seulement que toutes sont vraies ou qu'aucune d'entre elles n'est vraie.

Exercice 20.

En trouvant une primitive, trouvez la valeur de $\int \frac{1}{z^2} dz$, où C est le cercle $|z| = 2$ orienté dans le sens anti-horaire.

Solution.

La fonction $f(z) = \frac{1}{z^2}$, qui est continue partout sauf à l'origine, a une primitive $F(z) = -\frac{1}{z}$ dans le domaine $|z| > 0$, constituée du plan entier avec l'origine supprimée.

Par conséquent, selon le théorème 2.2.1, $\int \frac{1}{z^2} dz = 0$.

Théorème de Cauchy – Goursat

Dans le théorème 2.2.1, nous avons noté que lorsqu'une fonction continue f a une primitive dans un domaine D, alors l'intégrale de $f(z)$ autour d'un contour fermé donné C se situant entièrement dans D a la valeur zéro.

Maintenant, nous présentons un théorème donnant d'autres conditions sur une fonction f qui assurent que la valeur de l'intégrale de $f(z)$ autour d'un contour fermé simple est égale à zéro.

Théorème 3.2.2. (Théorème de Cauchy - Goursat)

Si une fonction f est analytique en tout point à l'intérieur et sur un simple contour fermé C, alors

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Définition 3.2.3.

*Un domaine D **simplement connexe** est un domaine tel que chaque contour fermé simple qu'il contient, ne contient que des points de D.*

*Un domaine qui n'est pas simplement connexe est dit être **multi-connexe**.*

Exemple 5.

L'ensemble des points intérieurs à un contour simple fermé est un domaine simplement connexe. Le domaine annulaire entre deux cercles concentriques n'est cependant pas simplement connexe, il est multi-connexe.

Nous avons la généralisation suivante du théorème de Cauchy-Goursat.

Théorème 3.2.4.

Si une fonction f est analytique dans un domaine simplement connexe D, alors

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

pour chaque contour fermé C situé dans D.

Le théorème 2.2.1 donne le résultat suivant.

Corollaire 3.2.5.

Une fonction qui est analytique dans tout un domaine simplement connexe D doit avoir une primitive partout dans D.

Remarque.

Notez que le plan complexe est simplement connexe. Par conséquent, par le corollaire ci-dessus, nous voyons que des fonctions entières possèdent toujours des primitives.

Le théorème suivant généralise le théorème de Cauchy - Goursat pour des domaines multi-connexes.

Théorème 3.2.6.

Supposons que

(a) C est un contour simple fermé, décrit dans le sens antihoraire,

(b) C_k $(k = 1,2,\dots,n)$ sont des contours fermés simples situés à l'intérieur de C, décrits dans le sens des aiguilles d'une montre, disjoints et dont les intérieurs n'ont pas de point commun.

Si une fonction f est analytique sur tous ces contours et dans tout le domaine multi-connexe constitué des points à l'intérieur de C et à l'extérieur de chaque C_k, alors

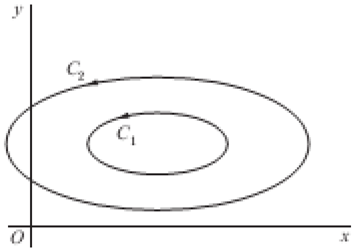
$$\oint_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0$$

Le corollaire suivant montre que si C_1 est continuellement déformé en C_2 en passant toujours par des points pour lesquels f est analytique, la valeur de l'intégrale de f sur C_1 ne change jamais.

Corollaire 3.2.7. (Principe de déformation des chemins)

Soient C_1 et C_2, les contours fermés simples orientés positivement, C_1 étant intérieur à C_2. Si une fonction f est analytique dans la région fermée constituée de ces contours et de tous leurs points entre eux, alors

$$\oint_{C_2} f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz.$$



Exemple 6

Soit C tout contour fermé simple orienté positivement entourant l'origine. Soit aussi C_0 un cercle orienté positivement dont le centre est l'origine et de rayon si petit que C_0 est entièrement à l'intérieur de C. Puisque, $\oint_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ et puisque $\frac{1}{z}$ est analytique partout sauf en $z = 0$, Alors par le corollaire ci-dessus 2.2.7 , il en résulte que $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

La formule intégrale de Cauchy

Maintenant, nous énonçons **la formule intégrale de Cauchy (ou première formule intégrale de Cauchy)**, qui affirme que si une fonction f est analytique à l'intérieur et sur un simple contour fermé C, les valeurs de f à l'intérieur de C sont complètement déterminées par les valeurs de f sur C.

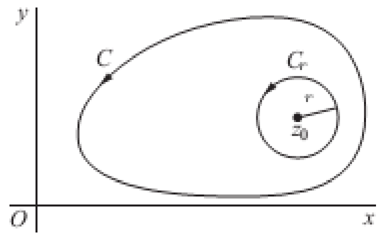
Théorème 3.2.8.

Soit f une fonction analytique partout à l'intérieur et sur un simple contour fermé C, pris dans le sens positif. Si z_0 est un point quelconque à l'intérieur de C, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Preuve.

Soit C_r un cercle orienté positivement $|z - z_0| = r$, où r est suffisamment petit pour que C_r soit à l'intérieur de C. Alors, le quotient $\frac{f(z)}{z - z_0}$ est analytique entre et sur les contours C_r et C.



Par conséquent, par le corollaire 3.2.7, nous avons

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ce qui implique que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_{C_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

Comme dans le problème 17, on obtient $\oint_{C_r} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$, de sorte que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i = \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

Puisque f est analytique, et donc continu en z_0, donc, pour tout nombre positif ε, il existe un nombre positif δ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ chaque fois que $|z - z_0| < \delta$. Supposons que le rayon du cercle C_r est inférieur au nombre δ. Alors $|\, z - z_0 \,| = r < \delta$ lorsque z est sur C_r, de sorte que $|\, f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ quand z est un tel point. Par conséquent, par le théorème 2.1.4, nous obtenons

$$\left| \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_{C_r} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| dz \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

Donc

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

Et comme ε est arbitraire , il s'ensuit que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

La formule intégrale de Cauchy pour les dérivées

La formule intégrale de Cauchy peut être étendue pour fournir une représentation intégrale des dérivées de f en z_0.

> *Nous supposons que la fonction f est analytique partout à l'intérieur et sur un simple contour fermé C, pris dans le sens positif et z_0 est un point quelconque à l'intérieur de C. Alors, pour* $n = 1,2,3, \ldots,$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad .$$

*C'est ce que l'on appelle **la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées (ou seconde formule intégrale de Cauchy)**.*

Remarque.

De la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, il s'ensuit que si une fonction f est analytique à un moment donné, ses dérivées de tous les ordres y sont également analytiques.

Conséquences de la formule intégrale de Cauchy

Le théorème suivant, appelé **théorème de Morera**, donne une réciproque partielle au théorème de Cauchy - Goursat.

Théorème 3.2.9. (théorème de Morera)

Soit f continu sur un domaine D. Si $\oint_C f(z)\, dz = 0$ pour chaque contour fermé C dans D, alors f est analytique sur D.

Preuve.

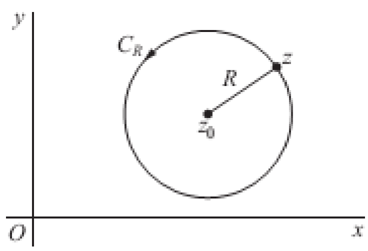
Selon le théorème 2.2.1, f a une primitive dans D, c'est-à-dire qu'il existe une fonction analytique F telle que $F'(z) = f(z)$ en chaque point de D. Puisque f est la dérivée d'une fonction analytique F, il en résulte que (remarque ci-dessus) f est analytique en D.

Théorème 3.2.10. (Inégalité de Cauchy)

Supposons qu'une fonction f soit analytique à l'intérieur et sur un cercle C_R orienté positivement, centré sur z_0 et de rayon R.

Si M_R dénote la valeur maximale de $|f(z)|$ sur C_R, Alors

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\, M_R}{R^n}, (n = 1,2,\ldots).$$



Preuve

Selon la formule intégrale de Cauchy pour les dérivés, nous avons

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z0)^{n+1}} dz \ , \quad (n = 1,2,\ldots).$$

En appliquant le théorème 2.1.4, on voit que

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{n!\ M_R}{R^n}, (n = 1,2,\ldots).$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy pour prouver qu'aucune fonction entière n'est bornée dans le plan complexe, à l'exception d'une constante.

Ceci est connu sous le nom de **théorème de Liouville**.

Théorème 3.2.11. (théorème de Liouville)

Si une fonction f est entière et bornée dans le plan complexe, alors $f(z)$ est constante dans tout le plan complexe.

Preuve.
Puisque f est bornée dans le plan complexe,

$$\exists M > 0 \text{ telle que } |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc, puisque f est entière, pour tout choix de z_0 et de R, pour la valeur $n = 1$, l'inégalité de Cauchy implique que, $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$. Quand $R \to \infty$, nous obtenons $f'(z_0) = 0$.

Puisque le choix de z_0 était arbitraire, cela signifie que $f'(z) = 0$ partout dans le plan complexe.

Cela montre que f est une fonction constante.

En utilisant le théorème de Liouville, nous donnons maintenant une preuve simple du **théorème fondamental de l'algèbre**.

Théorème 3.2.12. (théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, $(a_n \neq 0)$ de degré n $(n \geq 1)$ a au moins un zéro. c'est-à-dire qu'il existe au moins un point z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Preuve.
Supposons que $P(z)$ ne soit nul pour aucune valeur de z. Alors l'inverse $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est une fonction entière et elle est également bornée dans le plan complexe. Par conséquent, selon le théorème de Liouville $f(z)$, et donc $P(z)$ est une constante. Mais $P(z)$ n'est pas une constante.

Cette contradiction montre qu'il existe au moins un point z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Lemme 3.2.13.

Supposons que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ à chaque point dans un voisinage $|z - z_0| < \varepsilon$ dans lequel f est analytique. Alors z_0 a la valeur constante $f(z_0)$ dans tout ce voisinage.

Théorème 3.2.14. (Principe du module maximal)

Si une fonction f est analytique et non constante dans un domaine donné D, alors $|f(z)|$ n'a pas de valeur maximale dans D. Autrement dit, il n'y a pas de point z_0 dans le domaine tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tous les points z da D.

Corollaire 3.2.15.

Supposons qu'une fonction f soit continue sur une région fermée bornée R et qu'elle soit analytique et non constante à l'intérieur de R.

Alors la valeur maximale de $|f(z)|$ dans R, qui est toujours atteinte, se produit quelque part sur la frontière de R et jamais à l'intérieur.

Exercice 21.

Evaluez $\int_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz$, *où C est*

(a) $|\, z\,| = \frac{1}{2}$ *et **(b)*** $|\, z\,| = 2$*, orienté dans le sens positif.*

Solution.

(a) Ici, $f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z - 1}$ est analytique en tous les points sauf le point $z = 1$, et $z = 1$ est en dehors de C. Donc par le théorème de Cauchy- Goursat,

$$\int_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 0.$$

(b) Ici, $f(z) = z^2 - z + 1$ est analytique partout et comprend le point $z = 1$.

Par conséquent, par la formule intégrale de Cauchy, nous obtenons

$$\int_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i.$$

Exercice 22.

Evaluez $\oint_C \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz$ *, où C est le cercle orienté positivement* $|z| = 2.$

Solution.

Ici, $f(z) = \frac{z}{9 - z^2}$ est analytique à l'intérieur et sur C, et $z_0 = -i$ est à l'intérieur de C.
Par la formule intégrale de Cauchy, nous obtenons

$$\oint_C \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = \oint_C \frac{\frac{z}{9 - z^2}}{(z - (-i))} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(\frac{-i}{10}) = \pi 5.$$

Exercice 23.

Évaluer $\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$, *où C est le cercle unité orienté positivement.*

Solution

Ici, $f(z) = e^{2z}$ est analytique à l'intérieur et sur C, et z_0 = 0 est situé à l'intérieur de C.
Par la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, nous obtenons

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z - 0)^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{8\pi i}{3}$$

Exercice 24.

Évaluer $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-2)} dz$,

où C est le cercle orienté positivement $|z| = 3.$

Solution.

Ici, $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)\,(z-2)}$ est analytique partout, sauf les points $z = 1$ et $z = 2$, et ces deux points sont situés à l'intérieur de C. En utilisant des fractions partielles, nous avons

$$\frac{1}{(z - 1)\,(z - 2)} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}.$$

Par la formule intégrale de Cauchy, nous obtenons

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)\,(z-2)} dz = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)} dz - \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-2)} dz = 2\pi i\,(e4 - e2).$$

Exercice 25.

Évaluer $\oint_c \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3} dz$,

où C *est un contour orienté positivement, englobant le point* $z_0 = -i$.

Solution.

Ici, $f(z) = z^4 - 3z^2 + 6$ est analytique partout et le point $z_0 = -i$ est à l'intérieur de C.

Par conséquent, par la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, nous obtenons

$$\oint_c \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3} dz = \oint_c \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(-i) = -18\pi i\,.$$

IV - Série de nombres complexes

Les séries de Taylor, et plus généralement les séries de Laurent, sont utilisées pour étudier des propriétés importantes des fonctions analytiques, concernant leurs zéros et leurs problèmes aux points isolés (singularités). Ils sont également utiles pour étudier les propriétés de fonctions spéciales, telles que les fonctions de Bessel.
La théorie des série entiers décrite dans ce chapitre doit beaucoup au mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897). Weierstrass a introduit dans l'analyse la notation (ε, δ) dans les preuves, remplaçant la terminologie de Cauchy, telle que "se rapproche indéfiniment d'une certaine limite" et "augmente indéfiniment." qui porte son nom.

Dans ce chapitre, nous étudions la convergence et la divergence de suites complexes et de séries infinies complexes. Les définitions de base pour les suites complexes et les séries sont essentiellement les mêmes que pour le cas réel.

1 - Convergence de Suites et Séries de Nombres Complexes

Une suite complexe est une fonction de la forme $f: IN \rightarrow \mathbb{C}$, où pour tout $n \in IN$, nous écrivons $f(n) = z_n$.

Une suite infinie $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ de nombres complexes a une limite z si,

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in IN$ tel que $|z_n - z| < \varepsilon$ chaque fois que $n > n_0$.

La quantité $|z_n - z|$ mesure la différence entre z_n et sa limite prévue z. La définition dit donc que cette différence peut être réduite au maximum, à condition que celle-ci soit suffisamment importante. Il s'ensuit que la convergence n'est pas affectée par les termes initiaux.

Observez que l'inégalité $z_n - z| < \varepsilon$ revient à dire que le point z_n est situé dans un cercle de rayon ε et centré en z.

Dans le cas où $z_n = x_n$ et $z = x$ sont réels, l'inégalité $| x_n - x | < \varepsilon$ est équivalent aux inégalités $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, de sorte que xn se situe dans l'intervalle ouvert $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

La limite de la suite ci-dessus est unique si elle existe.

Si cette limite existe, on dit que la suite **converge** vers z, et on écrit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$.

Si la suite n'a pas de limite, on dit qu'elle **diverge**.

La preuve du théorème suivant est laissée comme un exercice.

Théorème 4.1.1.

Supposons que $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ *et* $z = x + iy$.
Alors

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \text{ si et seulement si } \lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Une série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

de nombres complexes **converge** vers **la somme** S si de la suite

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_N, (N = 1,2,\ldots)$$

des sommes partielles convergent vers S, nous écrivons alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Puisqu'une suite peut avoir au plus une limite, une série peut avoir au plus une somme.

Lorsqu'une série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Théorème 4.1.2.

Supposons que $z_n = x_n + iy_n, (n = 1,2,\ldots)$ *et* $S = X + iY$. *Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \text{ si et seulement si } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

Preuve.

Soit S_N la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Alors, nous pouvons écrire $S_N = X_N + Y_N$, où $X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ et $Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$.

Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ si et seulement si $\lim_{N\to\infty} S_N = S$.

Selon le théorème 3.1.1, $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ si et uniquement si $\lim_{N\to\infty} X_N = X$ et $\lim_{N\to\infty} Y_N = Y$.

Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$ et $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$.

Corollaire 4.1.3.

Si une série de nombres complexes converge, le nième terme converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Ce corollaire montre que les termes des séries convergentes sont bornés.

En d'autres termes, lorsque la série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge,

$$\exists M > 0 \text{ telle que } |z_n| \leq M, \qquad \forall n \in IN.$$

Une série de nombres complexes $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ est convergente.

Comme $z_n = x_n + iy_n$ alors $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ et par suite la série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolument si la série de nombres réels $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge.

Corollaire 4.1.4.

La convergence absolue d'une série de nombres complexes implique la convergence de cette série.

En analyse complexe, nous définissons les séries entières de manière formellement identique au cas réel: une série entière centrée en un nombre complexe z_0 est une expression de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$; où a_n sont des nombres complexes. Notez que pour tout nombre complexe z, cette série infinie est une série de nombres complexes, qui converge ou diverge.

Une série entière peut être considérée comme une généralisation d'un polynôme, mais contrairement aux polynômes, les séries entières ne convergent pas nécessairement à tous les points. Les séries entières fourniront une source importante de fonctions analytiques, et nous verrons que les séries entières jouent un rôle clé dans la compréhension des propriétés des fonctions analytiques.

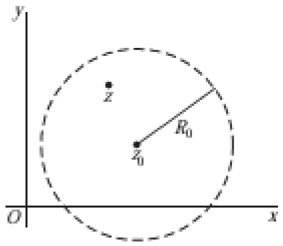
2 - Série de Taylor

Nous commençons par le **théorème de Taylor**.

Théorème 4.2.1.

Supposons qu'une fonction f soit analytique sur un disque $|z - z_0| < R_0$, centré en z_0 et de rayon R_0. Alors $f(z)$ a la représentation en série entières

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (|z - z_0| < R_0, \quad où \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0,1,2,\dots).$$



c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge vers $f(z)$ lorsque z est dans le disque ouvert $|z - z_0| < R_0$ (Ce développement de $f(z)$ s'appelle la **série de Taylor** de $f(z)$ autour du point z_0.)

puisque $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ et $0! = 1$, la série de Taylor de $f(z)$ autour du point z_0 peut s'écrire comme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 \dots, (| z - z_0 | < R_0).$$

Remarque.

Une série de Taylor lorsque $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \, , (| z | < R_0)$$

est appelée une **série de Maclaurin**.

Toute fonction qui est analytique en un point z_0 doit avoir une série de Taylor au voisinage de z_0.

Car si f est analytique en z_0, elle est analytique dans tout voisinage $| z - z_0 | < \varepsilon$ de z_0.

Donc, selon le théorème de Taylor, $f(z)$ a une série de Taylor en z_0 valide dans $| z - z_0 | < \varepsilon$.

De plus, si f est entière, R_0 peut être choisi arbitrairement grand et la condition de validité devient $|z - z_0| < \infty$ et la série de Taylor convergent alors vers $f(z)$ en chaque point z du plan.

Si f est analytique partout dans un cercle centré en z_0, la série de Taylor de $f(z)$ autour de z_0 converge vers $f(z)$ pour chaque point z de ce cercle et, en réalité, selon le théorème de Taylor, la série converge vers $f(z)$ dans le cercle autour de z_0 dont le rayon est la distance de z_0 au point z_1 le plus proche auquel f ne peut être analytique.

Exemple 7
Considérons la fonction $f(z) = e^z$. Puisque $f(z) = e^z$ est une fonction entière, elle a une représentation en série de Maclaurin qui est valable pour tout z. Ici,

$$f^{(n)}(z) = e^z, (n = 0,1,2,\dots) \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, (n = 0,1,2,\dots)$$

Par suite,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|\, z\,| < \infty).$$

Exemple 8
Soit $(z) = \frac{1}{1-z}$. Alors, les dérivées de la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$, qui n'est pas analytique en $z = 1$, sont

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \quad (n = 0,1,2,\dots) \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!, \quad (n = 0,1,2,\dots).$$

Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad, \qquad (|\, z\,| < 1).$$

Exercice 26.
Déterminer la série de Taylor pour $f(z) = \frac{1}{z+z^4}$ valable pour | z | <1.

Solution.
On a,

$$\frac{1}{z+z^4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-z^3)}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^3)^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n-1}.$$

3 - Série Laurent

Si une fonction f n'est pas analytique en un point z_0, mais elle est analytique dans tout un domaine annulaire $R_1 < |z - z_0| < R_2$, centré sur z_0, la représentation de la série de puissances pour $f(z)$ implique des puissances positives et négatives de $z - z_0$. Une telle représentation de série pour $f(z)$ s'appelle **série de Laurent**.

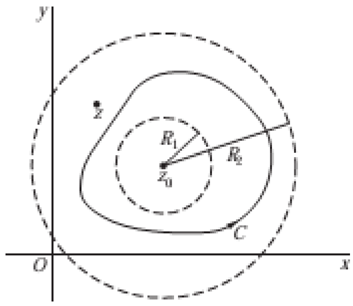
Théorème 4.3.1.

Supposons qu'une fonction f soit analytique dans tout un domaine annulaire $R_1 < |z - z_0| < R_2$, centré en z_0, et supposons que C désigne tout contour fermé simple orienté positivement autour de z_0 et se situant dans ce domaine. Alors, à chaque point du domaine, $f(z)$ a la représentation en série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \quad (R_1 < z - z_0 | < R_2)$$

Où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, (n = 0,1,2,\dots) \; et \; b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, (n = 1,2,\dots)$$



Remarque.

Remplacer n par $-n$ dans la deuxième série de la série ci-dessus nous permet d'écrire cette série comme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^{-n}}$$

Où

$$b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, (n = -1, -2, \dots)$$

Ainsi, nous avons

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n}(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

Ou on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

Où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\ ,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Lorsque le domaine annulaire est spécifié, il peut être prouvé que la série de Laurent pour une fonction donnée est unique. Ce fait nous aide à trouver les coefficients dans une série de Laurent autrement qu'en faisant directement appel à leurs représentations intégrales. Nous illustrons cela à travers les exemples suivants.

Exemple 9

Nous avons l'extension de la série Maclaurin de e^z comme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots (|\, z\,| < \infty).$$

En remplaçant z par $\frac{1}{z}$, dans cette représentation de série, nous obtenons la série de Laurent pour $e^{\frac{1}{z}}$ comme:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots (0 < |\, z\,| < \infty).$$

Notez qu'aucune puissance positive de z n'apparaît dans cette série de Laurent, les coefficients des puissances positives étant nuls.

Exemple 10

Considérons $(z) = \frac{1}{z+5}$. Trouver les extensions de la série de Laurent de $f(z)$ valables dans les régions

(i) $|\, z\,| < 5$, et (ii) $|\, z\,| > 5$.

Solution

1) Ici, la région de (i) est un disque ouvert dans un cercle de rayon 5, centré sur $z = 0$. Nous écrivons

$$f(z) = \frac{1}{z+5} = \frac{1}{5\left(1+\frac{z}{5}\right)} = \frac{1}{5\left(1-\left(-\frac{z}{5}\right)\right)}.$$

Par conséquent, en utilisant le développement en série géométrique, nous obtenons

$$f(z) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}},$$

valable dans la région $|\, z\,| < 5$, qui implique uniquement des puissances non négatives de z.

2) Maintenant, la région de (ii) est un anneau ouvert à l'extérieur d'un cercle de rayon 5, centré en $z = 0$. Ici,

$$|\,z\,| > 5 \Rightarrow |\frac{5}{z}| < 1.$$

Nous avons donc

$$f(z) = \frac{1}{z+5} = \frac{1}{z\left(1 + \frac{5}{z}\right)} = \frac{1}{z\left(1 - \left(-\frac{5}{z}\right)\right)}.$$

En utilisant le développement en série géométrique, nous obtenons

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{z^{n+1}},$$

valable dans la région $|z| > 5$, qui implique uniquement des puissances négatives de z.

Exercice 27.

Déterminez la série de Laurent pour $f(z) = \frac{1}{z(z+5)}$ valide dans la région $|z| < 5$.

Solution.

Nous savons d'après l'exemple ci-dessus que

$$\frac{1}{(z\ +\ 5)} = \sum_{n\,=\,0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}},$$

valable dans la région $|z| < 5$. Donc

$$f(z) = \frac{1}{z(z\ +\ 5)} = \frac{1}{z}\frac{1}{z\ +\ 5} = \frac{1}{z}\sum_{n\,=\,0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}} = \sum_{n\,=\,0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{5^{n+1}},\quad (|z| < 5)$$

4 - Convergence absolue et uniforme des séries entières

Nous allons maintenant discuter des propriétés de base des séries entières.

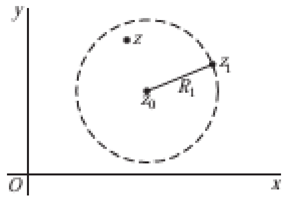
Une question naturelle consiste à déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels une série entière donnée converge.

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.4.1.

Si une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge lorsque* $z = z_1$, $(z_1 \neq z_0$), *elle est absolument convergente en chaque point z du disque ouvert* $|z - z_0| < R_1$

où $R_1 = |\, z_1 - z_0 \,|$.



Analogue au concept d'intervalle de convergence en calcul réel, une série entière complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a un cercle de convergence défini par $|z - z_0| < R$ pour un certains $R \geq 0$.

Le théorème ci-dessus implique que l'ensemble de tous les points à l'intérieur d'un cercle centré en z_0 est une région de convergence pour la série entière ci-dessus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, à condition qu'il converge vers un autre point que z_0.

Le plus grand cercle centré sur z_0 tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en chaque point de l'intérieur est appelé le **cercle de convergence** de la série.

La série ne peut converger en aucun point z_2 en dehors de ce cercle, selon le théorème; sinon, il convergerait partout dans le cercle centré sur z_0 et passant par z_2. Le premier cercle ne pourrait donc pas être le cercle de convergence.

La série entière converge absolument pour tout z satisfaisant $|z - z_0| < R$ et diverge pour $|z - z_0| > R$. Ici, R est appelé le rayon de convergence de la série entière.

Le rayon R de convergence peut être

(a) $R = 0$ (auquel cas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ne converge que lorsque $z = z_0$),

(b) un nombre fini $R < \infty$ (auquel cas la série entière donnée converge en tous les points intérieurs du cercle $|z - z_0| = R$),

(c) $R = \infty$ (auquel cas la série de puissances donnée converge pour tout z).

Une série entière peut converger vers certains, tous ou aucun des points du cercle de convergence.

Supposons que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ait un cercle de convergence $|z-z_0| = R$, et $S(z)$ et $S_N\ (z)$ représentent respectivement la somme et la somme partielle de cette série:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \qquad S_N\ (z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z-z_0)^n\,, \qquad (|z-z_0| < R)$$

Alors, la **fonction restante** $\rho_N(z)$ est donnée par $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z),\ z - z_0| < R)$.

Puisque la série entière converge pour toute valeur fixe de z lorsque $z - z_0| < R$, nous savons que le reste $\rho_N(z)$ tend vers zéro pour tout z lorsque N tend vers l'infini.

Cela signifie qu'à chaque nombre positif ε, il existe un entier positif $N\varepsilon$ tel que $|\rho_N(z)| < \varepsilon$ chaque fois que $N > N\varepsilon$.

Lorsque le choix de $N\varepsilon$ dépend uniquement de la valeur de ε et est indépendant du point z pris dans une région spécifiée du cercle de convergence, la convergence est dite **uniforme** dans cette région.

On peut montrer que si z_1 est un point à l'intérieur du cercle de convergence $|z-z_0| = R$ d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, alors cette série doit être uniformément convergente dans le disque fermé $|z-z_0| < R_1$, où $R_1 = |z_1 - z_0|$.

Notez qu'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ représente une fonction continue $S(z)$ en chaque point de son cercle de convergence $|z-z_0| = R$.

De plus, la somme $S(z)$ de la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est en fait analytique dans le cercle de convergence.

Théorème 4.4.2.

Soit C tout contour intérieur au cercle de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, et soit $g(z)$ toute fonction continue sur C.

Les séries formées en multipliant chaque terme de la série entière par $g(z)$ peuvent être intégrées terme par terme sur C; c'est à dire.,

$$\int_C g(z)\,S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n\,dz\,.$$

Si une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

converge vers $f(z)$ en tout point à l'intérieur d'un cercle $|z-z_0| = R$, alors c'est le développement en série de Taylor pour les puissances de $z - z_0$.

Si une série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

converge vers $f(z)$ en tout point d'un domaine annulaire autour de z_0, il s'agit du développement de la série de Laurent avec des puissances de $z - z_0$ pour ce domaine.

Un résultat important dans le calcul réel indique que, dans le domaine de convergence d'une série entière, une série de entière est différentiable, et que sa dérivée peut être obtenue en différenciant les termes individuels de la série entière terme à terme. Il en va de même pour les séries entière complexes:

Théorème 4.4.3.

La série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ peut être différenciée terme par terme. c'est-à-dire qu'à chaque point z intérieur du cercle de convergence de cette série,

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

De plus, $S'(z)$ a le même rayon de convergence que $S(z)$.

Supposons que chacune des séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ converge dans un certain cercle $|z - z_0| = R$.

Leurs sommes $f(z)$ et $g(z)$, respectivement, sont alors des fonctions analytiques dans le disque $|z - z_0| < R$, et le produit de ces sommes a un développement en série de Taylor valide ici:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $(| z - z0 | < R)$, où c_n est donné par

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} .$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ est appelée le **produit de Cauchy** des deux séries données.

Exercice 28.

Déterminez la série entière pour $f(z) = \frac{1}{z^2}$ valide dans la région $|z - 1| < 1$, en différenciant la représentation en série entière de $\frac{1}{z}$ dans la région $|z - 1| < 1$.

Solution.

Par expansion de série géométrique, nous avons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = \frac{1}{1 - \big(-(z - 1)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ (z - 1)^n \ , \qquad |z - 1| < 1.$$

Différencier chaque côté de cette équation donne,

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n \, (z - 1)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) \, (z - 1)^n , |z - 1| < 1.$$

Exercice 29.

Utilisez les extensions en séries entières de e^z et $\frac{1}{1+z}$ pour obtenir la représentation en série entière de $\frac{e^z}{1+z}$ dans la région $| z | < 1$.

Solution.
Par expansion de série géométrique, nous avons

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots., \qquad |z| < 1.$$

De plus,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty).$$

Par conséquent,

$$\frac{e^z}{1+z} = (1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots.)\,(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots.).$$

En multipliant ces deux séries terme par terme, on obtient

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \ldots., \qquad (|z| < 1).$$

V - Intégration et résidus

Dans ce chapitre, nous aborderons le théorème des résidus de Cauchy, qui est un outil puissant pour évaluer les intégrales linéaires de fonctions analytiques sur des courbes fermées; il peut souvent aussi être utilisé pour calculer des intégrales réelles. Il généralise le théorème de Cauchy - Goursat et la formule intégrale de Cauchy. Nous commençons par une étude détaillée de points singuliers isolés.

1 - Points singuliers et résidus

- *Rappelons qu'un point z_0 est appelé un **point singulier** d'une fonction f si f n'est pas analytique en z_0 mais analytique dans un voisinage de z_0.*
- *Un point singulier z_0 est dit **isolé** s'il existe un voisinage supprimé $0 < | z - z_0 | < \varepsilon$ de z_0 pour lequel f est analytique.*
- *S'il existe un nombre positif R_1 tel que f est analytique pour $R_1 < | z | < \infty$, alors f est dit avoir un point singulier isolé à $z_0 = \infty$.*

Exemples

la fonction $f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$ a trois points singuliers isolés $z = 0$ et $z = \pm i$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ a les points singuliers $z = 0$ et $z = \frac{1}{n}$, $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, tous situés sur le segment de l'axe réel de $z = -1$ à $z = 1$. Chaque point singulier, sauf $z = 0$, est isolé.

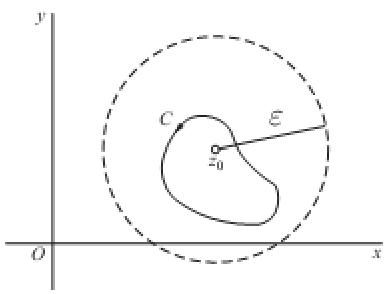
Le point singulier $z = 0$ n'est pas isolé car chaque ε-voisinage supprimé de l'origine contient d'autres points singuliers de la fonction (puisque $\frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$).

Supposons maintenant que z_0 soit un point singulier isolé d'une fonction f. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit analytique dans l'anneau $0 < | z - z_0 | < \varepsilon$.

Donc $f(z)$ a une représentation de la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (0 < z - z_0 | < \varepsilon)$$

Soit C tout contour fermé simple orienté positivement autour de z_0 qui se trouve dans le disque épointé $0 < | z - z_0 | < \varepsilon$.



Puisque $\int_C (z - z_0)^n dz = 0$ quand $z \neq z_0$, et $\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$, en intégrant la série de Laurent ci-dessus, terme par terme autour de C, on obtient:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\, b_1.$$

Le nombre complexe b_1, qui est le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans l'expansion en série de Laurent ci-dessus de $f(z)$, s'appelle le ***résidu*** *de f au point singulier isolé z_0, et on le désigne par $Res_{z=z_0} f(z)$.*
Nous avons donc

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, Res_{z=z_0} f(z).$$

Ceci fournit une méthode puissante pour évaluer certaines intégrales autour de simples contours fermés.

Exemple 11.
Considérons l'intégrale $\int_C z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$ où C est le cercle unité orienté positivement $|z| = 1$.

Puisque l'intégrant est analytique partout dans tout le plan complexe sauf en $z = 0$, il a une représentation en série de Laurent valable dans la région $0 < |z| < \infty$.

Donc, par l'équation $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, Res_{z=z_0} f(z)$, alors la valeur de l'intégrale $\int_C z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$ est $2\pi i$ fois le résidu de son intégrant en $z = 0$.

Notez que

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^3} - \ldots , \qquad 0 < |z| < \infty.$$

Ici, le coefficient de $1/z$ est $-\frac{1}{3!} \Rightarrow Res_{z=z_0} z^2 \sin\frac{1}{z} = -\frac{1}{3!}$. Par suite,

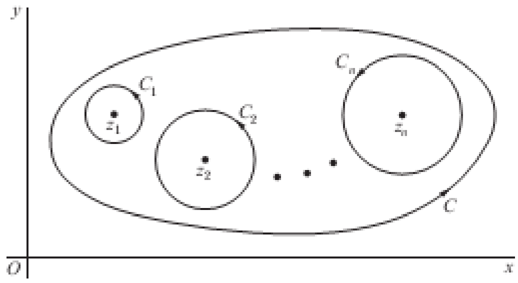
$$\int_C z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \cdot -\frac{1}{3!} = \frac{-\pi i}{3}.$$

Théorème 5.1.1. (Théorème des résidus de Cauchy)
Soit C un simple contour fermé, décrit dans le sens positif.

Si une fonction f est analytique à l'intérieur et sur C sauf pour un nombre fini de points singuliers z_k, $(k = 1,2,\ldots,n)$ à l'intérieur de C, alors

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f(z)$$

Preuve.
Soit les points z_k, $(k = 1,2,\ldots,n)$ des centres de cercles orientés positivement C_k qui sont à l'intérieur de C et qui sont si petits qu'ils n'ont pas de points communs.



Les cercles C_k, avec le simple contour fermé C, forment la frontière d'une région fermée dans laquelle f est analytique et dont l'intérieur est un domaine multi-connexe constitué des points à l'intérieur de C et à l'extérieur de chaque C_k.

Ainsi, par le théorème de Cauchy – Goursat pour les domaines multi-connexes,

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0.$$

Mais

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \, Res_{z=z_k} f(z), \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

Par suite

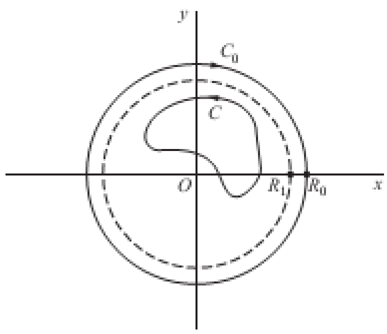
$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f(z)$$

Résidu à l'infini
Supposons qu'une fonction f soit analytique sur tout le plan complexe, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur d'un contour simple et fermé positivement orienté C.

Soit R_1 un nombre positif suffisamment grand pour que C soit situé à l'intérieur du cercle $|z| = R_1$.

Alors, la fonction f est clairement analytique dans tout le domaine $R_1 < |z| < \infty$ et dans ce cas, le point à l'infini est dit être un point singulier isolé de f.

Soit maintenant C_0 un cercle $|z| = R_0$, orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, où $R_0 > R_1$.



Le résidu de f à l'infini est défini au moyen de l'équation

$$\int_{C_0} f(z)dz = 2\pi\, i\, Res_{z=\infty} f(z) \qquad (1)$$

Puisque f est analytique dans toute la région fermée délimitée par C et C_0, le principe de déformation des chemins implique que

$$\int_C f(z)dz = \int_{-C_0} f(z)dz = -\int_{C_0} f(z)dz.$$

Par suite

$$\int_C f(z)dz = -2\pi\, i\, Res_{z=\infty} f(z) \qquad (2)$$

Maintenant pour trouver ce résidu, nous écrivons la série Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (R_1 < |z| < \infty),$$

Où

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{-C_0} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

En remplaçant z par $\frac{1}{z}$ dans la série de Laurent ci-dessus, puis en multipliant par $\frac{1}{z^2}$, on voit que

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-2} z^n \quad , (0 < |z| < \frac{1}{R_1}).$$

Donc, par définition des résidus, $c_{-1} = Res_{z=0} [\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)]$.

Mais, par la formule ci-dessus pour calculer les coefficients de la série de Laurent,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{-C_0} f(z)dz \Rightarrow \int_{C_0} f(z)dz = -2\pi\, i Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] \qquad (3)$$

Maintenant, à partir des équations (1) et (3), il s'ensuit que

$$Res_{z=\infty} f(z) = -Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] \qquad (4)$$

À partir des équations (2) et (4), nous obtenons le théorème suivant, qui est parfois plus efficace à utiliser que le théorème des résidus de Cauchy puisqu’il n’implique qu’un résidu.

Théorème 5.1.2.

Si une fonction f est analytique partout dans le plan complexe, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur d'un contour fermé simple orienté positivement C, alors

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\, i Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Exercice 30.

Évaluer l'intégrale $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$, *où C est le cercle orienté positivement* $|z| = 2$.

Solution.

Ici, l'intégrant $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ a deux singularités isolées $z = 0$ et $z = 1$, toutes deux intérieures à C.

Nous développons d'abord $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ en tant que série de Laurent sur $z = 0$ comme suit:

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z}\cdot\left(\frac{-1}{1-z}\right) = (5-\frac{2}{z})(-1-z-z^2-\dots),\qquad (0<|z|<1).$$

Par conséquent, $Res_{z=0} f(z)$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans ce développement en série de Laurent, c'est-à-dire, $Res_{z=0} f(z) = 2$.

Maintenant nous développons $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ comme une série de Laurent sur $z = 1$ comme suit:

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= \left(5+\frac{3}{z-1}\right)[1-(z-1)+(z-1)^2-\dots],\quad (0<|z-1|<1)$$

De cette expansion, on obtient $Res_{z=1} f(z) = 3$, le coefficient de $\frac{1}{z-1}$.

Par conséquent, selon le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i[Res_{z=0} f(z) + Res_{z=1} f(z)] = 2\pi i[2+3] = 10\pi i.$$

Remarque.

Le problème ci-dessus peut également être résolu en utilisant le théorème 4.1.2. Ici,

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5-2z}{z(1-z)} = \frac{5-2z}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = (\frac{5}{z}-2)\,(1+z+z^2+\dots),(0<|z|<1)).$$

Par conséquent, $Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]$ est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans l'extension de la série de Laurent ci-dessus. c'est-à-dire que $Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = 5$. Par suite,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i Res_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = 2\pi i\cdot 5 = 10\pi i.$$

2 - Types de points singuliers isolés

Soit $z = z_0$ un point singulier isolé d'une fonction f.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit analytique dans l'anneau $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Donc $f(z)$ a une représentation de la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (0 < \; z \; - \; z_0 \,| < \varepsilon)$$

- *Ici, la partie de la série de Laurent de $f(z)$ autour du point singulier isolé $z = z_0$ constituée des puissances négatives de $z - z_0$, i.e. que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ est appelée la **partie principale** de f en z_0.*

Nous utilisons maintenant la partie principale pour identifier le point singulier isolé z_0 comme l'un des trois types spéciaux.

- Si la partie principale de f en z_0 contient au moins un terme non nul mais que le nombre de tels termes est fini, alors il existe un entier positif m, $(m \geq 1)$ tel que

$$b_m \neq 0 \text{ et } b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0.$$

Alors le développement en série de Laurent de $f(z)$ devient

$$f(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + b_m(z - z_0)^m, \quad (0 < |z - z0| < \varepsilon),$$

où $b_m \neq 0$.

Dans ce cas, le point singulier isolé z_0 est appelé **un pôle d'ordre** m.

Un pôle d'ordre $m = 1$ est appelé un **pôle simple**.

- Si chaque b_n, dans l'extension de la série de Laurent, de $f(z)$ autour du point singulier isolé $z = z_0$, est nul, de sorte que

$$f(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (0 < |z - z0| < \varepsilon)$$

Dans ce cas, le point singulier isolé z_0 est appelé un **point singulier amovible**.

Notez que le résidu en un point singulier amovible est toujours égal à zéro.

Si on redéfinit, f en z_0 pour que $f(z_0) = a_0$, l'extension de Laurent devient valable sur tout le disque $|\, z - z_0 \,| < \varepsilon$. Comme une série entière représente toujours une fonction analytique à l'intérieur de son cercle de convergence, il s'ensuit que f est maintenant analytique en z_0.

La singularité z_0 de f est donc supprimée.

- Si un nombre infini de coefficients b_n, dans la partie principale du développement en série de Laurent de $f(z)$ autour du point singulier isolé z_0, sont non nuls, alors z_0 est considéré comme un **point singulier essentiel** de f.

> *Dans chaque voisinage d'un point singulier essentiel, une fonction prend chaque valeur finie, avec une exception possible, un nombre infini de fois.*

Ceci est connu comme le théorème de Picard.

Exemple 12. (pôle simple)

Considérons la fonction $f(z) = \frac{5z-2}{z-1}$.

Notez que

$$f(z) = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5(z-1)+3}{z-1} = 5 + \frac{3}{z-1},$$

qui est le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{5z-2}{z-1}$ *autour du point singulier isolé* $z = 1$*. Ici, la partie principale ne contient qu'un terme non nul, à savoir* $\frac{3}{z-1}$*, et donc* $z = 1$ *est un simple pôle de* $f(z)$ *et*

$$Res_{z=1} \frac{5z-2}{z-1} = 3.$$

Exemple 13. (Pôle d'ordre 2)

Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2\,(z+1)}$*. Notez que*

$$f(z) = \frac{1}{z^2\,(z+1)} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \ldots, \ (0 < |z| < 1).$$

Ainsi, la partie principale de l'extension en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2\,(z+1)}$ *autour du point singulier isolé* $z = 0$ *montre que* $z = 0$ *est un pôle d'ordre* 2 *et*

$$Res_{z=0} \frac{1}{z^2\,(z+1)} = -1.$$

Exemple 14. (Point singulier amovible)

Considérons la fonction $f(z) = \frac{sinz}{z}$*. Notez que*

$$\frac{sinz}{z} = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots, \ (0 < |z| < \infty).$$

Ainsi, la partie principale du développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{sinz}{z}$ *n'a pas de terme, donc z = 0 est un point singulier amovible de* $f(z)$*, ainsi* $Res_{z=0} \frac{sinz}{z} = 0$*, et si nous posons* $f(0) = 1, f(z)$ *devient une fonction entière.*

Exemple 15. (Point singulier essentiel)

On a

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots, \ (0 < |z| < \infty).$$

Ainsi, la partie principale du développement en série de Laurent de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ contient une infinité de termes, donc $z = 0$ est un point singulier essentiel de $f(z)$ et

$$Res_{z=0}e^{\frac{1}{z}} = 1.$$

Exercice 31.

Montrer que $z = 0$ est une singularité amovible de la fonction $f(z) = \frac{1-cosz}{z^2}$.

Solution.

Nous avons l'expansion de la série Maclaurin

$$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \qquad (|z| < \infty).$$

Par conséquent, pour $0 < |z| < \infty$, Nous avons

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right)\right] = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \ldots.$$

La partie principale du développement en série de Laurent n'a pas de terme, donc $z = 0$ est un point singulier amovible de $\frac{1-cosz}{z^2}$.

Si nous définissons $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(z)$ devient une fonction entière.

Exercice 32.

Évaluer $\int_C e^{-\frac{1}{z}} sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où C est le cercle unitaire à orientation positive.

Solution.

Nous avons les extensions de la série

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots, (0 < |z| < \infty)$$

Et

$$sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \ldots, (0 < |z| < \infty)$$

Par conséquent, pour $0 < |z| < \infty$, Nous avons

$$e^{-\frac{1}{z}} sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots$$

Ce qui implique que la partie principale du développement en série de Laurent de $e^{-\frac{1}{z}} sin\left(\frac{1}{z}\right)$ comporte une infinité de termes. Donc $z = 0$ est un point singulier essentiel avec le résidu 1.

Par suite

$$\int_C e^{-\frac{1}{z}} sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Calcul des résidus aux pôles

Si une fonction $f(z)$ a une singularité isolée en un point z_0, la méthode de base pour identifier z_0 en tant que pôle et y trouver le résidu consiste à écrire la série de Laurent appropriée et à noter le coefficient de $\frac{1}{z-\ z_0}$. Mais, le calcul d'une expansion de la série de Laurent est fastidieux dans la plupart des cas.

Le théorème suivant fournit une autre caractérisation des pôles et un moyen de trouver des résidus aux pôles.

Théorème 5.3.1.

Un point singulier isolé z_0 d'une fonction est un pôle d'ordre m si et seulement si $f(z)$ peut être écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

où (z) est analytique et non nul en z_0.

De plus,

$$Res_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0) \ \ si \ \ m = 1 \ \ et \ \ Res_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \ \ si \ \ m \geq 2.$$

Exercice 33.

Trouvez les résidus de $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ aux points singuliers.

Solution.

Ici, $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ est analytique en tout point sauf $z = \pm 3i$.

Nous pouvons écrire

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - 3\imath} \text{ où } \varphi(z) = \frac{z+1}{z+3i}.$$

Puisque $\varphi(z)$ est analytique en $3i$ et $\varphi(3i) \neq 0$, $z = 3i$ est un simple pôle de f, et

$$Res_{z\,=\,3i} f(z) = \varphi(3i) = \frac{3-i}{6}.$$

De même, $z = -3i$ est aussi un simple pôle de f, et

$$Res_{z\,=\,-3i} f(z) = \frac{3+i}{6}.$$

Excercice 34.

Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}\, dz,$$

prise dans le sens antihoraire autour du cercle $|\ z - 2\ | = 2$.

Solution.
Ici,

$$f(z) = \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2 + 9)}$$

a les points singuliers $z = 1$ et $z = \pm 3i$ et ce sont tous des pôles simples.

Ici, C est $|z - 2| = 2$. Les pôles simples $z = 1$ se trouvent à l'intérieur de C, alors que $z = -3\imath$ et $z = 3i$ se situe à l'extérieur du côté C.

Comme dans le problème ci-dessus, nous trouvons que $Res_{z=1}f(z) = \frac{1}{2}$.

Par le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2 + 9)}\, dz = 2\pi i\, Res_{z=1}f(z) = \pi\, i.$$

Exercice 35.

Évaluer

$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2}$ *dz, le long du cercle* $|z-1| = 3$ *pris dans le sens antihoraire.*

Solution.
Notez que $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$ est analytique en tout point sauf $z = -1$.
Ici, C est $|z - 1| = 3$ ⇒Le point singulier $z = -1$ est situé à l'intérieur de C.

On peut aussi écrire

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z + 1)^2} \quad \text{où } \varphi(z) = e^z.$$

Puisque $\varphi(z)$ est analytique et non nul en $z = -1$, c'est un pôle double de f, et

$$Res_{z=-1}f(z) = \frac{\varphi'(-1)}{1!} = e^{-1}.$$

Par suite,

$$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2}dz = 2\pi i\, Res_{z=-1}f(z) = 2\pi\, i.e^{-1} = \frac{2\pi i}{e}.$$

Zéros de fonctions analytiques

Supposons qu'une fonction f soit analytique en un point z_0. Puisque $f(z)$ est analytique en z_0, toutes les dérivées $f^{(n)}(z)$, $(n = 1,2,\ldots)$ existent en z_0.

Si $f(z_0) = 0$ et s'il existe un entier positif m tel que $f^{(m)}\,(z+0) \neq 0$ et que chaque dérivée d'ordre inférieur s'annule en z_0, on dit que f a un **zéro d'ordre** m en z_0.
Le théorème suivant fournit une autre caractérisation des zéros d'ordre m.

Théorème 5.4.1.

Soit une fonction f analytique en un point z_0. Elle a un zéro d'ordre m en z_0 si et seulement s'il existe une fonction g analytique et non nulle en z_0, telle que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

Exemple 16

Considérons le polynôme $f(z) = z^3 - 8$.

Notez que f est entière et que $f(2) = 0$ *et* $f'(2) = 12 \neq 0. \Rightarrow z_0 = 2$ est un zéro d'ordre 1.

Ceci peut également être vu en utilisant le théorème ci-dessus.

On peut écrire $z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$, donc $f(z)$ a un zéro d'ordre 1 en $z_0 = 2$, puisque

$$f(z) = (z - 2)g(z), \text{ où } g(z) = z^2 + 2z + 4,$$

et parce que f et g sont entières et $g(2) \neq 0$.

Le théorème suivant montre que les zéros d'une fonction analytique sont isolés lorsque la fonction n'est pas identique nulle.

Théorème 5.4.2.

Étant donné une fonction f et un point z_0, supposons que

(a) f est analytique en z_0;

(b) $f(z_0) = 0$ mais $f(z)$ n'est pas identique à zéro dans aucun voisinage de z_0.

Alors $f(z) \neq 0$ dans tout le voisinage supprimé $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de z_0.

Théorème 5.4.3.

Étant donné une fonction f et un point z_0, supposons que

(a) f est analytique dans tout le voisinage N_0 de z_0;

(b) $f(z) = 0$ en chaque point z d'un domaine D ou d'un segment de droite L contenant z_0.

Alors $f(z) = 0$ dans N_0; i.e. que $f(z)$ est identiquement égal à zéro dans tout N_0.

Théorème 5.4.4.

Supposer que

(a) deux fonctions p et q sont analytiques en un point z_0;

(b) $p(z_0) \neq 0$ et q a un zéro d'ordre m en z_0.

Alors le quotient $\frac{p(z)}{q(z)}$ a un pôle d'ordre m en z_0.

Théorème 5.4.5.

Soit deux fonctions p et q être analytiques en un point z_0. *Si* $p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0$ *et* $q'(z_0) \neq 0$*, alors* z_0 *est un simple pôle du quotient* $\frac{p(z)}{q(z)}$ *et*

$$Res_{z = z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Exemple 17

Considérons la fonction $f(z) = cotz = \frac{cosz}{sinz}$, qui est un quotient des fonctions entières $p(z) = cos\, z$ et $q(z) = sin\, z$. Ses singularités se produisent aux zéros de q.

i.e. aux points $z = n\pi, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Puisque $p(n\pi) = (-1)^n \neq 0, q(n\pi) = 0$ et $q'(n\pi) = (-1)^n \neq 0$, chaque point singulier $z = n\pi$ de f est un pôle simple, avec résidu $= \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = (-1)^n (-1)^n = 1$.

Exercice 36.

Trouver la valeur de l'intégrale $\int_C \frac{9z+i}{z(z^2+1)} dz$*, prise dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour du cercle* $|z| = 2$.

Solution.

Ici, $f(z) = \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \frac{p(z)}{q(z)}$ a les points singuliers $z = 0$ et $z = \pm i$ et tous ceux-ci sont situés à l'intérieur de C.

Puisque

$$p(0) = i \neq 0, \qquad q(0) = 0 \;\; et \;\; q'(0) = 1 \neq 0,$$

le point singulier $z = 0$ de f est un pôle simple, avec

$$Res_{z = 0} f(z) = \frac{p(0)}{q'(0)} = i.1 = i.$$

De même, puisque

$$p(i) = 10i \neq 0, \qquad q(i) = 0 \; et \; q'(i) = -2 \neq 0,$$

le point singulier $z = i$ de f est un simple pôle, avec

$$Res_{z= i}\, f(z) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{10i}{-2} = -5i$$

et, puisque

$$p(-i) = -8i \neq 0, \qquad q(-i) = 0 \; et \; q'(-i) = -2 \neq 0,$$

le point singulier $z = -i$ de f est un pôle simple, avec

$$Res_{z = -i} f\,(z) = p(-i)q'(-i) = \frac{-8i}{-2} = 4i$$

Par le théorème des résidus de Cauchy,

$$\int_C \frac{9z+i}{z(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\,[Res_{z\,=\,0}f(z) + Res_{z=\,i}\,f(z) + Res_{z\,=\,-i}f\,(z)]$$

$$= 2\pi i\,[i + (-5i) + (4i)] = 0.$$

3 - Évaluation des intégrales impropres

Nous avons vu que le théorème des résidus de Cauchy nous permet d'évaluer des intégrales sans réellement l'intégrer physiquement, c'est-à-dire qu'il nous permet d'évaluer une intégrale simplement en connaissant les résidus contenus dans un contour fermé.

Dans cette section, nous verrons comment utiliser le théorème des résidus pour évaluer certaines intégrales réelles qui étaient impossibles (ou difficiles) à l'aide de techniques d'intégration réelle à partir de calculs à une variable.

En calcul, l'intégrale impropre d'une fonction continue $f(x)$ sur l'intervalle semi-infini $0 \leq x < \infty$ est définie au moyen de l'équation

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x)dx.$$

Lorsque la limite de droite existe, l'intégrale impropre est dite **converger** vers cette limite.

Si $f(x)$ est continu pour tout x, son intégrale incorrecte sur l'intervalle infini $-\infty < x < \infty$ est définie en écrivant

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\, dx + \lim_{R_2 \to \infty} \int_0^{R_2} f(x)\, dx \qquad (1)$$

et quand les deux limites du côté droit existent, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge vers leur somme.

Une autre valeur attribuée à l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est la **valeur principale de Cauchy (P.V.).**
La valeur principale de Cauchy (P.V.) de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est définie comme suit:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \qquad (2)$$

à condition que cette simple limite existe.

Si l'intégrale (1) converge, sa valeur principale de Cauchy (2) existe. Mais il n'est pas toujours vrai que l'intégrale (1) converge lorsque sa P.V. de Cauchy existe.

Exemple
considérons la fonction $f(x) = x$. Ici, les deux limites

$$\lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\, dx \ \ et \ \lim_{R_2 \to \infty} \int_0^{R_2} f(x)\, dx$$

n'existent pas.

Mais,

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} x\, dx = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = 0.$$

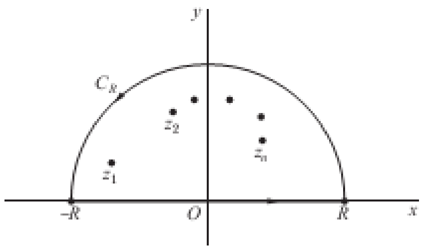
Si $f(x), (-\infty < x < \infty)$, est une fonction paire et si la valeur principale de Cauchy (2) existe, alors

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, [P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx].$$

Nous décrivons maintenant une méthode impliquant des sommes de résidus, qui est souvent utilisée pour évaluer les intégrales impropres des fonctions rationnelles $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels et aucun facteur en commun. Nous convenons que $q(z)$ n'a pas de zéros réels mais a au moins un zéro au dessus de l'axe réel.

La méthode commence par l'identification de tous les zéros distincts du polynôme $q(z)$ situés au-dessus de l'axe réel. Ils sont, bien sûr, en nombre fini et peuvent être étiquetés comme $z_1, z_2, \ldots, z_n$, où n est inférieur ou égal au degré de $q(z)$.

Nous intégrons ensuite le quotient $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ autour de la frontière orientée positivement de la région semi-circulaire constituée de la partie C_R dans le demi-plan supérieur, du cercle de centre $z = 0$ et de rayon R et le segment de droite de $-R$ à R sur l'axe réel.



Nous prenons le nombre positif R comme si grand que tous les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se trouvent à l'intérieur du chemin fermé simple décrit ci-dessus.

La représentation paramétrique $z = x, (-R \le x \le R)$ du segment de l'axe réel et le théorème des résidus de Cauchy permet d'écrire que

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res_{z=z_k} f(z).$$

Si

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

il s'ensuit que

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res_{z=z_k} f(z).$$

Donc, si f est paire, alors

$$\int_0^\infty f(x)dx = \pi i \sum_{k=0}^{n} Res_{z=z_k} f(z).$$

Exercice 37.

Trouver la valeur principale de Cauchy de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx$$

Solution.

Considérons

$$f(z) = \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Alors $f(z)$ n'est pas analytique en $z = \pm\, i\ et\ z = \pm\, 2i$ et les points singuliers de $f(z)$ situés dans le demi-plan supérieur sont $z = i\ et\ z = 2i$.

Considérons le simple contour fermé englobant la région semi-circulaire délimitée par le segment $z = x, (-R \le x \le R)$ de l'axe réel et la moitié supérieure C_R du cercle $|z| = R$. (Ici, R est suffisamment grand pour que les points singuliers $z = i$ et $z = 2i$ de f situés dans le demi-plan supérieur appartiennent à l'intérieur du contour fermé simple mentionné).

En intégrant $f(z)$ dans le sens anti-horaire autour de la frontière de cette région semi-circulaire, on voit que

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\ dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i[Res_{z=i} f(z) + Res_{z=2i} f(z)]$$

Par le calcul, nous obtenons

$$Res_{z=i} f(z) = \frac{i-1}{6i} \quad \text{et} \quad Res_{z=2i} f(z) = \frac{2-i}{6i}.$$

Par suite

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\ dx = 2\pi i\left[\frac{i-1}{6i} + \frac{2-i}{6i}\right] - \int_{C_R} f(z)dz = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z)dz$$

Ceci est valable pour toutes les valeurs de R supérieures à 2.

Maintenant, nous montrons que

$$\int_{C_R} f(z)dz \to 0 \text{ quand } R \to \infty$$

Sur $|z| = R$, nous avons

$$|\, z^2 + z\,| \le R^2 + R, \qquad |\, z^2 + 1\,| \ge ||\, z\,|^2 - 1\,| = R^2 - 1$$

Et

$$|\, z^2 \; + \; 4 \,| \geq \; ||\, z \,|^2 - 4 \,| = \; R^2 - 4. \Rightarrow \; |f(z)| \leq \frac{R^2 \; + R}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

Cela implique que

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)|dz \leq \frac{R^2 \; + R}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \, \pi R, \quad (\text{à } l'aide \; de \; 2.1.4).$$

Ainsi, quand $R \; \to \infty$, $\int_{C_R} f(z)dz \; \to \; 0$.

Par suite

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \; + \; x}{(x^2 \; + \; 1)(x^2 \; + \; 4)} \; dx \; = \; \pi/3.$$

Intégrales définies impliquant des sinus et des cosinus

La méthode des résidus est également utile pour évaluer certaines intégrales définies du type

$$\int_0^{2\pi} F(sin \; \theta, cos \; \theta) \; d\theta \qquad (1)$$

Étant donné la forme d'un intégrant dans (1), on peut raisonnablement espérer que l'intégrale résulte du paramétrage habituel du cercle unitaire $z \; = \; e^{i\theta}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Soit $z \; = \; e^{i\theta}$, de sorte que $\sin \theta \; = \; \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta \; = \; \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $d\theta \; = \frac{dz}{iz}$.

Mettre tout cela en (1) rendements

$$\int_0^{2\pi} F(sin \; \theta, cos \; \theta) \; d\theta = \int_C \; F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2} \right) \frac{dz}{iz} \qquad (2)$$

où C est le cercle unitaire.

Lorsque l'intégrant dans l'intégrale (2) se réduit à une fonction rationnelle de z, on peut évaluer cette intégrale au moyen du théorème des résidus de Cauchy une fois que les zéros du dénominateur ont été localisés et qu'aucun d'entre eux ne se trouve sur C.

Exercice 38.

Utilisez les résidus pour montrer que si $-1 \; < a \; < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a sin\theta} \; = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Solution.

Cette formule d'intégration est clairement valable lorsque $a \; = \; 0$, supposons donc que $a \neq 0$.

Avec les substitutions $\sin \theta \; = \; \frac{z - z^{-1}}{2i}$ et $d\theta \; = \frac{dz}{iz}$, l'intégrale prend la forme

$$\int_C \; \frac{\frac{2}{a}}{z^2 \; + \; (2i/a)z - 1} dz,$$

où C est le cercle orienté positivement $|\ z\ | = 1$.

En utilisant une formule quadratique, nous trouvons que le dénominateur de l'intégrant a les zéros imaginaires purs

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) i \text{ et } z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) i.$$

Soit $f(z)$ l'intégrant dans l'intégrale ci-dessus, alors $f(z) = \frac{\frac{2}{a}}{z^2 + (2i/a)z - 1}$.

Puisque $|a| < 1$, $|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1$.

De plus, puisque $|z_1 z_2| = 1$, il s'ensuit que $|z_1| < 1$. Il n'y a donc pas de points singuliers sur C et le seul point singulier à l'intérieur de C est le point z_1. Le résidu correspondant peut être trouvé en écrivant

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)} \text{ où } \varphi(z) = \frac{\frac{2}{a}}{(z - z_2)}.$$

Donc z_1 est un pôle simple et

$$Res_{z = z_1} f(z) = \frac{\frac{2}{a}}{(z1 - z2)} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta} = 2\pi i Res_{z = z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Annexes

Annexe A - Fonctions exponentielle, logarithmique et puissance complexes

Introduction

Dans cette section et dans la suivante, nous examinerons les fonctions exponentielle, logarithmique, trigonométrique et hyperbolique d'une variable complexe z. Bien que les définitions de ces fonctions complexes soient motivées par leurs analogues à variables réelles, les propriétés de ces fonctions complexes donneront lieu à des surprises.

a) Fonction exponentielle

Rappelons que dans les variables réelles, la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ a les propriétés

$$f'(x) = f(x) et\, f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2). \qquad (1)$$

Nous voulons certainement la définition de la fonction complexe

$$f(z) = e^z, \qquad \text{où} \quad z = x + iy,$$

pour $y = 0, e^z = e^x$ et vérifions e^z possède les mêmes propriétés que dans (1).

Nous avons déjà utilisé une fonction exponentielle avec un exposant imaginaire pur. La formule d'Euler,

Pour tout nombre réel y on définit

$$e^{iy} = \text{cosy} + i\text{siny}. \qquad (2)$$

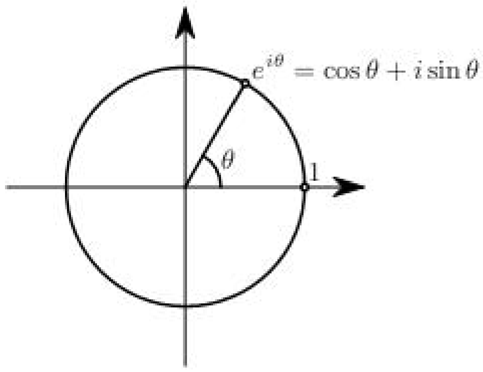


Figure Définition d'Euler de $e^{i\theta}$.

Exemple.

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Cela conduit à la célèbre formule d'Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$, qui combine les cinq quantités les plus fondamentales en mathématiques: $e, \pi, i, 1$ et 0.

Raisons pour lesquelles la définition (2) semble une bonne définition.

Sachant que la série de Taylor de e^x dans IR est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Substituons e^{iy} dans e^x:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) = \cos y + i\sin y. \end{aligned}$$

Pour $z = x + iy$, il est naturel de s'attendre à ce que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ et ainsi de (2),

$$e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y).$$

Inspirés par ce résultat formel, nous formulons la définition suivante.

Définition

La fonction e^z définie par

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \qquad (3)$$

est appelée la fonction exponentielle complexe.

La fonction exponentielle e^z est également désignée par le symbole $exp\, z$.

Notez que (3) se réduit à e^x lorsque $y = 0$.

Analyticité de e^z

La fonction exponentielle e^z est entière et sa dérivée est donnée par:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z. \qquad (4)$$

Preuve

Pour établir que e^z est entière, nous utilisons le critère d'analyticité. Notons d'abord que les parties réelle et imaginaire,

$$u(x,y) = e^x \cos y \;\; et \;\; v(x,y) = e^x \sin y$$

de e^z sont des fonctions continues et ont des dérivées partielles du premier ordre continues pour tout (x,y) .

De plus, les équations de Cauchy-Riemann en u et v sont facilement vérifiées:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \;\; et \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Par conséquent, la fonction exponentielle e^z est entière.

Et la dérivée d'une fonction analytique f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

et le dérivée de e^z est:

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x cos\, y + ie^x sin\, y = e^z.$$

Module, argument et conjugué

Le module, l'argument et le conjugué de la fonction exponentielle sont facilement déterminés à partir de (1).

Si nous exprimons le nombre complexe $w = e^z$ sous forme polaire:

$$w = e^x cos\, y + ie^x sin\, y = r\,(cos\,\theta + i\, sin\,\theta),$$

on voit alors que

$$r = e^x \text{ et } \theta = y + 2n\pi, \qquad \text{pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Parce que r est le module et θ est un argument de w, on a:

$$|\, e^z| = e^x \qquad (5)$$

$$arg(e^z) = y + 2n\pi, \qquad n = 0, \; \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (6)$$

et Nous savons déjà que $e^x > 0$ pour tout x réel, et il en résulte de (4) que $|e^z| > 0$.

Cela implique que $e^z \neq 0$ pour tous les z complexes.

En d'autres termes, le point $w = 0$ n'est pas dans l’ensemble des valeurs de la fonction complexe $w = e^z$.

L'équation (5) n'exclut toutefois pas la possibilité que e^z soit un nombre réel négatif.

En fait, vous devriez vérifier que si, par exemple, $z = \pi i$, alors $e^{\pi i}$ est réel et

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1 < 0.$$

Une formule pour le conjugué du complexe exponentiel z est trouvée en utilisant les propriétés des fonctions réelles du cosinus et du sinus. Puisque la fonction cosinus réelle est paire, nous avons

$$cos\, y = cos\,(-y) \text{ pour tout } y$$

et, puisque la fonction sinusoïdale réelle est impaire, nous avons

$$-\, sin\, y = sin(-y) \text{ pour tout } y,$$

ainsi:

$$\overline{e^z} = e^x cos\, y - ie^x sin\, y = e^x cos\,(-y) + ie^x sin\,(-y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

Par conséquent, pour tous les complexes, nous avons montré :

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \qquad (7)$$

Propriétés algébriques de e^z

Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes, alors

(i) $e^0 = 1$

(ii) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(iii) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

(iv) $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Preuve de (i) et (ii)

(ii) La preuve de propriété (i) découle de l'observation selon laquelle la fonction exponentielle complexe s'accorde avec la fonction exponentielle réelle pour une entrée réelle.

En effet, en (2), nous avons $e^{0+i0} = e^0$ et nous savons que, pour la fonction exponentielle réelle, $e^0 = 1$.

(ii) Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$. Selon la définition 4.1, nous avons:

$$e^{z_1}e^{z_2} = (e^{x_1} cos\, y_1 + ie^{x_1} sin\, y_1)\,(e^{x_2} cos\, y_2 + ie^{x_2} sin\, y_2)$$

$$= e^{x_1 + x_2}\,(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)$$

$$+\, ie^{x_1 + x_2}\,(siny_1 cos\, y_2 + cosy_1 sin\, y_2).$$

En utilisant les formules d'addition pour les fonctions réelles du cosinus et du sinus, nous pouvons réécrire l'expression précédente de la manière suivante:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1 + x_2} cos\,(y_1 + y_2) + ie^{x_1 + x_2} sin\,(y_1 + y_2). \qquad (7)$$

À partir de (1), le côté droit de (7) est $e^{z_1+z_2}$.

Nous avons donc montré que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Périodicité

La différence la plus frappante entre les fonctions exponentielles réelles et complexes est la périodicité de e^z.

Analogues aux fonctions périodiques réelles, on dit qu'une fonction complexe f est périodique avec la période T si $f(z + T) = f(z)$ pour tout z complexe.

La fonction exponentielle réelle n'est pas périodique, mais la fonction exponentielle complexe, car elle est définie à l'aide des fonctions cosinus et sinus, qui sont périodiques.

En particulier, par (1) et le théorème 4.2 (ii) nous avons

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\,(cos 2\pi + i\, sin\, 2\pi).$$

Puisque $cos2\pi = 1$ et $sin\ 2\pi = 0$, alors:

$$e^{z\,+\,2\pi i} = e^{z}. \qquad (8)$$

En résumé, nous avons montré que:

La fonction exponentielle complexe e^z est périodique avec une période imaginaire pur $2\pi i$.

Autrement dit, pour la fonction $f(z) = e^z$, nous avons $f(z + 2\pi i) = f(z)$ pour tout z.

Puisque (8) est valable pour toutes les valeurs de z, nous avons aussi $e^{(z\,+\,2\pi i)\,+2\,\pi i} = e^{z\,+\,2\pi i}$. Ce fait combiné à (8) implique que $e^{z\,+\,4\pi i} = e^{z}$.

Maintenant, en répétant ce processus, nous constatons que

$$e^{z\,+\,2n\pi i} = e^{z} \text{ pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Ainsi, $-2\pi i, 4\pi i, 6\pi i, etc.$, sont également des périodes de e^z.

De plus, si la fonction exponentielle complexe e^z applique le point z sur le point w, elle applique également les points

$$z \pm 2\pi i, z \pm 4\pi i, z \pm 6\pi i, etc.,$$

sur le point w. Ainsi, la fonction exponentielle complexe n'est pas injective, et toutes les valeurs e^z sont supposées dans une bande horizontale infinie de largeur $2\,\pi$ dans le plan z.

En d'autres termes, toutes les valeurs de la fonction e^z sont supposées dans l'ensemble

$$-\infty < x < \infty, y_0 < y \leq y_0 + 2\pi,$$

où y_0 est une constante réelle.

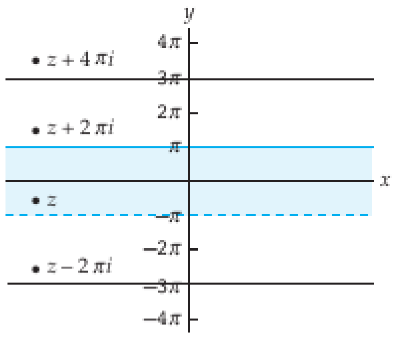


Figure 4.1 La région fondamentale de e^z

Dans la figure 4.1, nous divisons le plan complexe en bandes horizontales obtenues en définissant y_0 égal à tout multiple impair de π. Si le point z est dans la bande horizontale infinie

$$-\infty < x < \infty, \quad -\pi < y \leq \pi$$

indiqué en couleur dans Figure 4.1, puis les valeurs

$$f(z) = e^z, \quad f(z + 2\pi i) = e^{z+\,2\pi i}, \quad f(z - 2\pi i) = e^{z-2\,\pi i},$$

et ainsi de suite sont les mêmes.

La bande horizontale infinie définie par:

$$-\infty < x < \infty, \quad -\pi < y \leq \pi, \qquad (9)$$

est appelée la ***région fondamentale de la fonction exponentielle complexe.***

L'application exponentielle

Etant donné que toutes les valeurs de la fonction exponentielle complexe e^z sont supposées dans la région fondamentale définie par (9), l'image de cette région sous l'application $w = e^z$ est identique à l'image de l'ensemble du plan complexe. Afin de déterminer l'image de la région fondamentale sous $w = e^z$, notons que cette région est constituée de la collection de segments de droite $z(t) = a + it, -\pi < t \leq \pi$, où a est un nombre réel .

Par (11) de la section 2.2, l'image du segment $z(t) = a + it, -\pi < t \leq \pi$, sous l'application exponentiel est paramétrée par

$$w(t) = e^{z(t)} = e^{a+it} = e^a e^{it}, \qquad -\pi < t \leq \pi$$

et à partir de (10) de la section 2.2, nous voyons que w(t) définit un cercle centré à l'origine avec un rayon e^a. Parce que a peut être n'importe quel nombre réel, le rayon e^a de ce cercle peut être n'importe quel nombre réel positif non nul.

Ainsi, l'image de la région fondamentale sous l'application exponentielle consiste en la collecte de tous les cercles centrés à l'origine avec un rayon non nul. En d'autres termes, l'image de la région fondamentale $-\infty < x < \infty, \ -\pi < y \leq \pi$, sous $w = e^z$ est l'ensemble de tout complexe w avec $w \neq 0$ ou, de manière équivalente, l'ensemble |w| > 0.

Cet ensemble est parfois appelé plan complexe perforé.

Cela correspond à notre observation précédente, à savoir que le point $w = 0$ ne se situe pas dans l'ensemble des valeurs de la fonction exponentielle complexe.

L'application $w = e^z$ de la région fondamentale est illustrée à la figure 4.2.

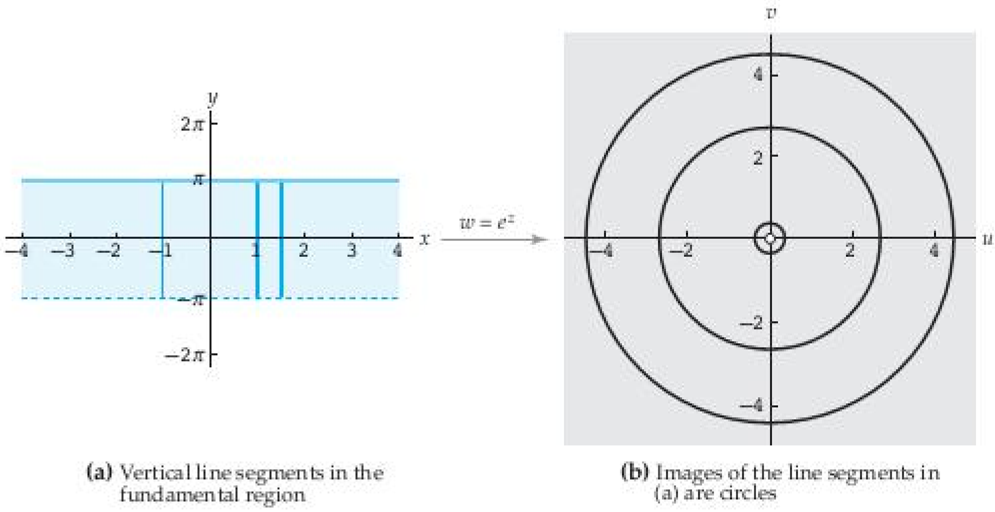


Figure 4.2 The image of the fundamental region under $w = e^z$

Chaque segment de ligne verticale représenté en couleur à la figure 4.2 (a) est représenté sur un cercle représenté en noir sur la figure 4.2 (b) par $w = e^z$. Au fur et à mesure que l'interception x d'un segment de ligne verticale augmente, le rayon de son image augmente.

Par conséquent, le segment de ligne le plus à gauche correspond au cercle le plus à l'intérieur, le segment de ligne du milieu correspond au cercle du milieu et le segment de ligne le plus à droite correspond au cercle le plus à l'extérieur.

L'utilisation de segments de ligne verticale pour déterminer l'image de la région fondamentale sous $w = e^z$ n'avait rien de particulier. L'image peut également être trouvée de la même manière en utilisant, par exemple, des lignes horizontales dans la région fondamentale.

Pour vous en assurer, considérons la ligne horizontale $y = b$. Cette ligne peut être paramétrée par $z(t) = t + ib, -\infty < t < \infty$, et son image sous $w = e^z$ est donnée par

$$w(t) = e^{z(t)} = e^{t+ib} = e^t e^{ib}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Définissez un nouveau paramètre avec $s = e^t$ et observez que $0 < s < \infty$ puisque $-\infty < t < \infty$. En utilisant le paramètre s, l'image est donnée par $W(s) = e^{ib}s,\ 0 < s < \infty$, qui, par (8) de la section 2.2, est l'ensemble constitué de tous les points $w \neq 0$ du rayon émanant de l'origine et contenant le point $e^{ib} = cos b + i \sin b$.

Ainsi, nous avons montré que l'image de la ligne horizontale $y = b$ sous l'application $w = e^z$ est l'ensemble de tous les points $w \neq 0$ du rayon issu de l'origine et faisant un angle de b radians avec le positif $u -$ axe.

L'image peut également être décrite par l'équation $arg(w) = b$.

Nous représentons cette propriété de l'application exponentielle complexe dans la figure 4.3.

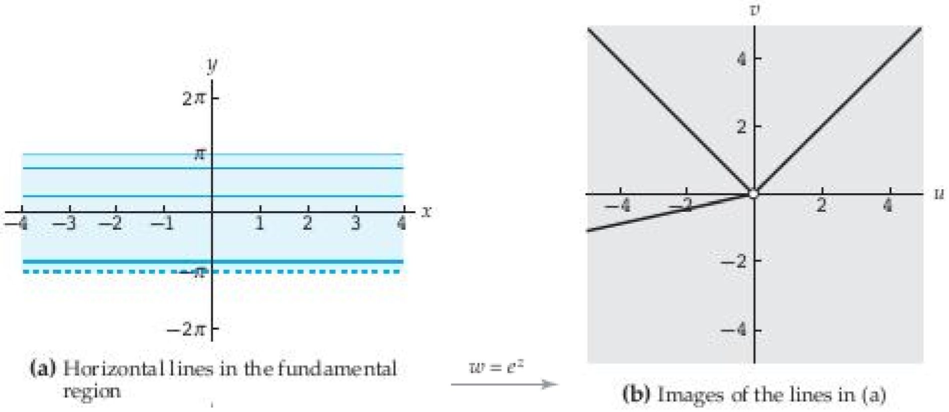


Figure 4.3 l'application w = e^z

Chacune des lignes horizontales montrées en couleur sur la figure 4.3 (a) est tracée sur un rayon représenté en noir sur la figure 4.3 (b).

Au fur et à mesure que l'angle y de la ligne horizontale augmente, l'angle du rayon de l'image avec l'axe u positif augmente. Par conséquent, la dernière ligne du bas correspond au rayon du troisième quadrant, la ligne du milieu au premier du quart, et la dernière ligne du deuxième quadrant.

Nous résumons maintenant ces propriétés de l'application exponentielle.

Propriétés de la transformation exponentielle

(i) $w = e^z$ transforme la région fondamentale $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$, sur l'ensemble $|w| > 0$.

(ii) $w = e^z$transforme le segment de droite verticale $x = a, -\pi < y \leq \pi$, sur le cercle $|w| = e^a$.

(iii) $w = e^z$ transforme la ligne horizontale $y = b, \; -\infty < x < \infty$, sur le rayon $arg(w) = b$.

b) Fonction logarithmique complexe

En analyse réelle, la fonction logarithmique naturelle $ln\, x$ est souvent définie comme une fonction inverse de la fonction exponentielle réelle e^x. À partir de ce point, nous utiliserons la notation alternative $log_e x$ pour représenter la fonction exponentielle réelle. Comme la fonction exponentielle réelle est injective sur son domaine IR, la définition de cette fonction inverse ne présente aucune ambiguïté. La situation est très différente en analyse complexe car la fonction exponentielle complexe e^z n'est pas une fonction injective sur son domaine $\mathbb{C}$.

En fait, étant donné un nombre complexe non nul fixé z, l'équation $e^w = z$ a une infinité de solutions.

Exemple,

Vous devriez vérifier que $12\pi i, 52\pi i$ et $-32\pi i$ sont toutes des solutions de l'équation $e^w = i$.

Pour voir pourquoi l'équation $e^w = z$ a une infinité de solutions, supposons en général que $w = u + iv$ est une solution de $e^w = z$. Alors nous devons avoir

$$|\, e^w| = |z| \text{ et } arg(\, e^w) = arg(z).$$

De (4) et (5), il en résulte que $e^u = |z|\ et\ v = arg(z)$ ou, de manière équivalente, $u = log_e\,|z|$ et $v = arg(z)$. Par conséquent, étant donné un nombre complexe z différent de zéro, nous avons montré que: Si $e^w = z$, alors

$$w = log_e\,|\,z\,| + i\,arg\,(z). \qquad (10)$$

Comme il y a une infinité d'arguments de z, (10) donne une infiniment de solutions w à l'équation $e^w = z$. L'ensemble de valeurs donné par (10) définit une fonction à valeurs multiples $w = G(z)$, comme décrit à la section 2.4, appelée le logarithme complexe de z et noté $ln\,z$. La définition suivante résume cette discussion.

Définition

La fonction à valeurs multiples $ln\ z$ *définie par:*

$$ln\,z = log_e\,|\,z\,| + i\,arg\,(z) \qquad (11)$$

est appelée le logarithme complexe.

Ci-après, la notation $In\ z$ sera toujours utilisée pour désigner le logarithme complexe à valeurs multiples. En passant à la notation exponentielle $z = re^{i\theta}$ dans (11), nous obtenons la description alternative suivante du logarithme complexe:

$$ln\,z = log_e\,r + i\,(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (12)$$

En (10), nous voyons que le logarithme complexe peut être utilisé pour trouver toutes les solutions de l'équation exponentielle $e^w = z$ lorsque z est un nombre complexe non nul.

Exemple 3: résolution d'équations exponentielles

Trouvez toutes les solutions complexes à chacune des équations suivantes.

(a) $e^w = i$, *(b)* $e^w = 1 + i$, *(c)* $e^w = -2$.

Solution

Pour chaque équation$e^w = z$, l'ensemble des solutions est donné par $w = lnz$, où lnz est trouvé à l'aide de la définition 4.2.

(a) Pour $z = i$, nous avons $|z| = 1$ et $arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Ainsi, à partir de (11) on obtient:

$$w = lni = log_e 1 + i\,(\frac{\pi}{2} + 2n\pi).$$

Puisque $log_e 1 = 0$, ceci se simplifie à:

$$w = \frac{(4\,n + 1)\pi}{2} i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

Par conséquent, chacune des valeurs:

$$w = \ldots, \qquad -\frac{7\pi}{2} i, \qquad -\frac{3\pi}{2} i, \qquad \frac{\pi}{2} i, \qquad \frac{5\pi}{2} i, \ldots$$

satisfait l'équation $e^w = i$. Les solutions à l'équation $e^w = i$ donnée plus haut correspondent aux valeurs de $ln\, i$ pour $n = 0, 1\ et\ -1$.

(b) Pour $z = 1 + i$, nous avons $|\, z\,| = \sqrt{2}$ et $arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$. Ainsi, à partir de (11) on obtient:

$$w = ln(1 + i) = log_e\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

Parce que $log_e\sqrt{2} = \frac{1}{2}loge2$, cela peut être réécrit comme suit:

$$w = \frac{1}{2}log_e 2 + \frac{(8n + 1)\pi}{4}i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Chaque valeur de w est une solution pour $e^w = 1 + i$.

(c) Encore une fois, nous utilisons (11). Puisque $z = -2$, nous avons $|z| = 2$ et $arg\ (z) = \pi + 2n\pi$, et ainsi:

$$w = ln\,(-2) = log_e 2 + i\,(\pi + 2n\pi).$$

C'est-à-dire

$$w = log_e 2 + (2n + 1)\,\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Chaque valeur de w vérifie l'équation $e^w = -2$.

Propriétés algébriques de *Inz*

> *Si $z_1\ et\ z_2$ sont des nombres complexes non nuls et n est un entier, alors*
>
> *(i)* $ln\,(z_1 z_2) = ln\, z_1 + lnz_2$
>
> *(ii)* $ln(\frac{z_1}{z_2}) = lnz_1 - lnz_2$
>
> *(iii)* $lnz_1^n = n\, ln\, z_1$.

Preuve

(i) selon la définition 4.2,

$$lnz_1 + lnz_2 = log_e|z_1| + i\arg(z_1) + log_e|z_2| + i\arg(z_2)$$

$$= log_e\,|z_1| + log_e|z_2| + i\big(arg\,(z_1) + arg\,(z_2)\big). \qquad (13)$$

Parce que le logarithme réel a la propriété

$$log_e a + log_e b = log_e(ab)\ pour\ a > 0\ et\ b > 0,$$

on peut écrire

$$log_e|\,z_1 z_2\,| = log_e|z_1| + log_e|z_2\,|.$$

De plus, à partir de (8) de la section 1.3, nous avons

$$arg(z_1) + arg\,(z_2) = arg\,(z_1 z_2).$$

Par conséquent, (13) peut être réécrit comme suit:

$$ln\, z_1 + lnz_2 = log_e|z_1 z_2| + i\, arg\,(z_1 z_2) = ln\,(z_1 z_2).$$

Valeur principale d'un logarithme complexe

Il est intéressant de noter que le logarithme complexe d'un nombre réel positif a une infinité de valeurs. Par exemple, le logarithme complexe $ln5$ est l'ensemble des valeurs $1{,}6094 + 2\, n\pi i$, où n est un entier, alors que le logarithme réel $log_e 5$ a une valeur unique: $log_e 5 \approx 1{,}6094$.

La valeur unique de $ln\, 5$ correspondant à $n = 0$ est identique à la valeur du logarithme réel $log_e 5$.

En général, cette valeur du logarithme complexe est appelée **la valeur principale du logarithme complexe** car elle est trouvée en utilisant l'argument principal $Arg\,(z)$ à la place de l'argument $arg\,(z)$ dans (11). Nous désignons la **valeur principale du logarithme** par le symbole Lnz.

Ainsi, l'expression $f(z) = Lnz$ définit la fonction, alors que $F(z) = ln\, z$ définit une fonction à valeurs multiples. Nous résumons cette discussion dans la définition suivante.

Définition

La fonction complexe Lnz définie par:

$$Lnz = log_e|\, z\,| + iArg\,(z) \qquad (14)$$

est appelée la valeur principale du logarithme complexe.

Nous utiliserons les termes fonction logarithmique et logarithme pour désigner à la fois la fonction à valeurs multiples $ln\, z$ et la fonction $Ln\, z$.

Cependant, dans le contexte, il convient de préciser à qui de ces projets il s'agit.

De (14), nous voyons que la valeur principale du logarithme complexe peut aussi être donnée par:

$$Lnz = log_e r + i\theta, \qquad -\pi < \theta \leq \pi. \qquad (15)$$

Exemple 4: Valeur principale du logarithme complexe

Calculez la valeur principale du logarithme complexe Lnz pour

(a) $z = i$, *(b)* $z = 1 + i$, *(c)* $z = -2$

Solution

Dans chaque partie, nous appliquons (14) de la définition 4.3.

(a) Pour $z = i$, nous avons $|\, z\,| = 1$ *et* $Arg\,(z) = \frac{\pi}{2}$, et ainsi: $Lni = log_e 1 + \frac{\pi}{2} i$.

Cependant, puisque $log_e 1 = 0$, ceci simplifie: $Lni = \frac{\pi}{2} i$.

(b) Pour $z = 1 + i$, nous avons $|\, z\,| = \sqrt{2}$ et $Arg\,(z) = \frac{\pi}{4}$, et ainsi:

$$Ln\,(1 + i) = log_e\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i.$$

Parce que $log_e\sqrt{2} = \frac{1}{2}log_e 2$, cela peut aussi s'écrire:

$$Ln\,(1\ +\ i) = \frac{1}{2}\ loge2\ + \frac{\pi}{4}i\ \approx\ 0{,}3466\ +\ 0{,}7854i.$$

(c) Pour $z\ =\ -2$, nous avons $|\,z\,| =\ 2$ et $Arg\ (z)\ =\ \pi$, et ainsi:

$$Ln\,(-2)\ = log_e 2\ +\ \pi i\ \approx\ 0{,}6931\ +\ 3{,}1416i.$$

Notez que chacune des valeurs trouvées dans les parties (a) - (c) aurait également pu être trouvée en définissant $n = 0$ dans les expressions pour lnz de l'exemple 3.

Remarque

Il est important de noter que les identités pour le logarithme complexe du théorème 4.3 ne sont pas nécessairement satisfaites par la valeur principale du logarithme complexe.

Exemple, il n'est pas vrai que $Ln\ (z_1 z_2) = Ln\, z_1\ + Ln\, z_2$ pour tous les nombres complexes z_1 et z_2 (bien que cela puisse être vrai pour certains nombres complexes).

***Lnz* comme une fonction inverse**

Comme $Ln\, z$ est l'une des valeurs du logarithme complexe lnz, il résulte de (10) que:

$$e^{Lnz}\ =\ z \text{ pour tout } z \neq 0. \qquad (16)$$

Ceci suggère que la fonction logarithmique Lnz est une fonction inverse de la fonction exponentielle e^z. Étant donné que la fonction exponentielle complexe n'est pas injective, ceci n'est pas tout à fait exacte.

Au contraire, la relation entre ces fonctions est similaire à la relation entre la fonction de quadrature z^2 et la fonction de racine carrée principale $z^{\frac{1}{2}}\ = \sqrt{|\,z\,|}\, e^{\frac{iArg(z)}{2}}$ définie par (7) à la section 2.4. La fonction exponentielle doit d'abord être restreinte à un domaine sur lequel elle est one-to-one afin d'avoir une fonction inverse bien définie. Nous montrons maintenant que si le domaine de e^z est limité à la région fondamentale, alors la valeur principale du logarithme complexe Lnz est sa fonction inverse.

Pour justifier cette affirmation, considérons un point $z\ =\ x\ +\ iy$ dans la région fondamentale $-\infty\ < x\ < \infty,\ -\pi\ < y \leq\ \pi$. De (4) et (5), nous avons que $|e^z|\ =\ e^x$ and $arg\ (e^z) = y + 2n\pi$, n est un entier. Ainsi, y est un argument de e^z. Puisque z est dans la région fondamentale, nous avons aussi $-\pi\ < y \leq\ \pi$, et il en résulte que y est l'argument principal de e^z. C'est-à-dire, $Arg\ (e^z)\ =\ y$.

En outre, pour le logarithme réel nous avons $log_e e^x\ =\ x$, et ainsi de la définition 4.3 nous obtenons:

$$Lne^z\ =\ log_e\,|\,e^z\,|\ +\ iArg\ (e^z)\ =\ log_e e^x\ +\ iy\ =\ x\ +\ iy.$$

Ainsi, nous avons montré que:

$$Lne^z\ =\ z \ \text{ si } -\infty\ < x\ < \infty\ \text{ et }\ -\ \pi\ < y \leq\ \pi. \qquad (17)$$

De (16) et (17), nous concluons que Lnz est la fonction inverse de e^z définie sur la région fondamentale. Ce qui suit résume la relation entre ces fonctions.

Lnz comme fonction inverse de e^z

Si la fonction exponentielle complexe $f(z) = e^z$ est définie sur la région fondamentale

$-\infty < x < \infty,\ -\pi < y \leq \pi,$

alors f est injective et la fonction inverse de f est la valeur principale du logarithme complexe

$f^{-1}(z) = Ln\ z.$

Gardez à l'esprit que (16) est valable pour tous les nombres complexes non nuls z, mais (17) n'est valable que si z est dans la région fondamentale.

Exemple, pour le point $z = 1 + \frac{3}{2}\pi i$, qui n'est pas dans la région fondamentale, nous avons:

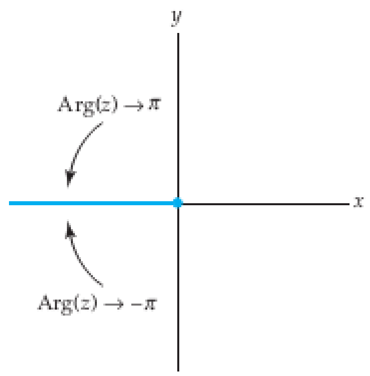
$$Lne^{1+\frac{3\pi i}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\pi i \neq 1 + \frac{3}{2}\pi i.$$

Analyticité

La valeur principale du logarithme complexe Lnz est discontinue au point $z = 0$ puisque cette fonction n'y est pas définie.

Cette fonction s'avère également être discontinue en chaque point de l'axe réel négatif.

Ceci est intuitivement clair puisque la valeur de $Ln\ z$ en un point z près de l'axe des x négatif dans le deuxième quadrant a une partie imaginaire proche de π, alors que la valeur d'un point proche dans le troisième quadrant a une partie imaginaire proche de $-\pi$. Voir la figure 4.5.



La figure 4.5 Lnz est discontinue en $z = 0$ et sur l'axe réel négatif.

La fonction Lnz est cependant continue sur l'ensemble constitué du plan complexe excluant l'axe réel non positif.

Pour voir qu'il en est ainsi, nous savons qu'une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue en un point $z = x + iy$ si et seulement si u et v sont tous deux des fonctions réelles continues en (x, y).

En (14), les parties réelles et imaginaires de Lnz sont

$$u(x, y) = log_e|z| = log_e \sqrt{x2 + y2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = Arg(z),$$

respectivement.

Le calcul multi-variable montre que la fonction $u(x, y) = log_e \sqrt{x2 + y2}$ est continue en tous les points du plan sauf $(0, 0)$ et on montre que la fonction $v(x, y) = Arg\ (z)$ est continu sur le domaine $|z| > 0, -\pi < arg\ (z) < \pi$. Par conséquent, il s'ensuit que Lnz est une fonction continue sur le domaine

$$|z\,| > 0, \quad -\pi < arg(\,z\,) < \pi, \qquad (18)$$

indiqué en gris dans la figure 4.6.

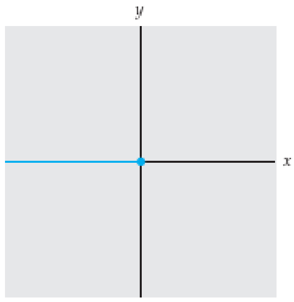


Figure 4.6 Branche coupée pour f_1

En d'autres termes, la fonction f_1 définie par:

$$f_1(z\,) = log_e r + i\theta \qquad (19)$$

est continu sur le domaine dans (18) où $r = |z|\ et\ \theta = arg(z)$.

Puisque la fonction f_1 est en accord avec la valeur principale du logarithme complexe $Ln\ z$ où ils sont tous deux définis, il s'ensuit que f_1 affecte à l'entrée z l'une des valeurs de la fonction à valeurs multiples $F(z) = ln\,z$.

En utilisant la terminologie de la section 2.6, nous avons montré que la fonction f_1 définie par (19) est une branche de la fonction à valeurs multiples $F(z) = ln\,z$.

(Rappelez-vous que les branches d'une fonction à valeurs multiples F sont désignées par $f_1, f_2, etc.$).

Cette branche est appelée la branche principale du logarithme complexe.

L'axe réel non positif représenté en couleur à la figure 4.6 est une **branche coupée** pour f_1 et le point $z = 0$ est **un point de branchement**. Comme le démontre le théorème suivant, la branche f_1 est une fonction analytique sur son domaine.

Analyticité de la branche principale de $\boldsymbol{ln\ z}$

La branche principale f_1 du logarithme complexe défini par (19) est une fonction analytique et sa dérivée est donnée par:

$$f_1'\,(z) = \frac{1}{z}. \qquad (20)$$

Preuve

Nous prouvons que f_1 est analytique en utilisant la coordonnée polaire. Puisque f_1 est défini sur le domaine donné en (18), si z est un point de ce domaine, alors nous pouvons écrire $z = rei\theta$ avec $-\pi < \theta < \pi$. Puisque les parties réelle et imaginaire de f_1 sont $u\ (r, \theta) = log_e r\ et\ v\ (r, \theta) = \theta$, nous trouvons que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \qquad et\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Ainsi, u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Puisque u, v et les premières dérivées partielles de $u\ et\ v$ sont continues en tout point du domaine donné en (18), il s'ensuit que f_1 est analytique dans ce domaine. De plus, la dérivée de f_1 est donnée par:

$$f_1'\ (z) = e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Comme $f_1(z) = Lnz$ pour chaque point z du domaine donné en (18), il découle du théorème 4.4 que $Ln\ z$ est différentiable dans ce domaine et que sa dérivée est donnée par f_1. C'est-à-dire, si $|\ z\ | > 0$ et $-\pi < arg\ (z) < \pi$ alors:

$$\frac{d}{dz}Lnz = \frac{1}{z}. \qquad (21)$$

Exemple 5: Dérivés des fonctions logarithmiques

> *Recherchez les dérivées des fonctions suivantes dans un domaine approprié:*
>
> *(a) z Lnz et (b) Ln* $(z + 1)$.

Solution

(a) D'après les règles de différenciation, il ressort que la fonction $z\ Lnz$ est différentiable à tous les points où les deux fonctions z et Lnz sont différentiables. Puisque z est entière et que $Ln\ z$ est différentiable sur le domaine donné en (18), il s'ensuit que $z\ Lnz$ est différentiable sur le domaine défini par $|\ z\ | > 0,\ -\pi < arg\ (z) < \pi$. Dans ce domaine, la dérivée est donnée par:

$$\frac{d}{dz}[z\ Lnz\ ] = z \cdot \frac{1}{z} + 1 \cdot Lnz = 1 + Ln\ z.$$

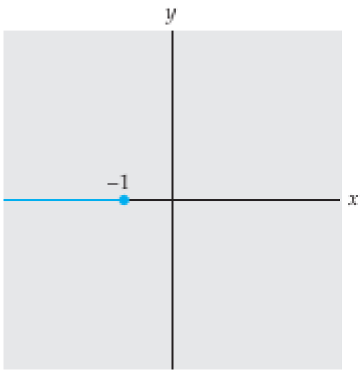
(b) La fonction $Ln\ (z + 1)$ est une composition des fonctions $Lnz\ et\ z + 1$.

Comme la fonction $z + 1$ est entière, il découle de la règle de chaîne que $Ln\ (z + 1)$ est différentiable en tout point $w = z + 1$ tel que $|\ w\ | > 0$ et $-\pi < arg\ (w) < \pi$.

En d'autres termes, cette fonction est différentiable au point w lorsque tout le temps w ne se trouve pas sur l'axe réel non positif. Pour déterminer les valeurs correspondantes de z pour lesquelles $Ln\ (z + 1)$ n'est pas différentiables, résolvons d'abord z en termes de w pour obtenir $z = w - 1$.

L'équation $z = w - 1$ définit une application linéaire du w -plan sur le z-plan donné par translation par -1. Sous cette application, l'axe réel non positif est appliqué sur le rayon issu de $z = -1$ et contenant le point $z = -2$ représenté en couleur à la figure 4.7.

Ainsi, si le point $w = z + 1$ est sur l'axe réel non positif, alors le point z est sur le rayon représenté à la figure 4.7.



La figure 4.7 $Ln\ (z + 1)$ n'est pas différentiable sur le rayon représenté en couleur.

Cela implique que $Ln\ (z + 1)$ est différentiable en tout point z qui n'est pas sur ce rayon.

Pour de tels points, la règle de la chaîne donne:

$$\frac{d}{dz} Ln(z + 1) = \frac{1}{z+1} \cdot 1 = \frac{1}{z+1}.$$

Application logarithmique

L'application logarithmique complexe $w = Lnz$ peut être comprise en termes d'application exponentiel $w = e^z$ puisque ces fonctions sont inverses les unes des autres.

Exemple, parce que $w = ez$ applique la région fondamentale $-\infty < x < \infty,\ -\pi < y \leq \pi$, dans le z-plan surjectivement l'ensemble $|w| > 0$ dans le w-plan, il en résulte que l'application inverse $w = Lnz$ applique l'ensemble |z|> 0 dans le z-plan surjectivement sur la région $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$, dans le w-plan.

D'autres propriétés de l'application exponentiel peuvent être reformulées de la même manière en tant que propriétés de l'application logarithmique. Ce qui suit résume certaines de ces propriétés.

Propriétés de l'application logarithmique

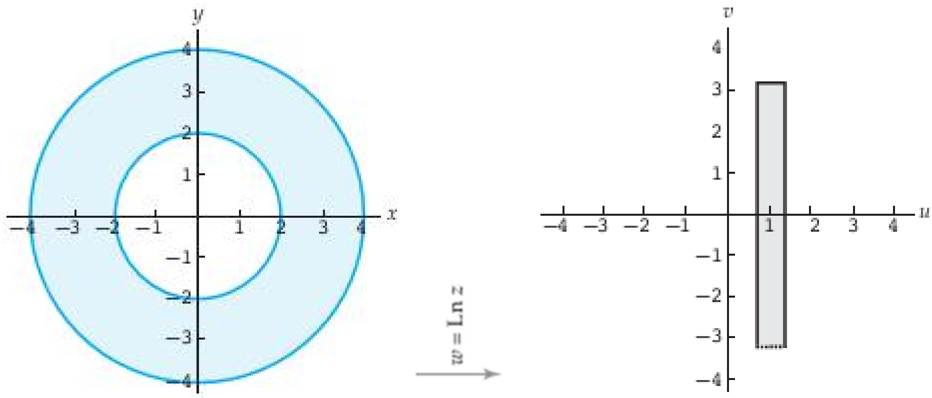
(i) $w = Lnz$ *transforme l'ensemble* $|\ z\ | > 0$ *sur la région* $-\infty < u < \infty, -\pi < v \leq \pi$.

(ii) $w = Lnz$ *transforme le cercle* $|z| = r$ *sur le segment de droite verticale* $u = log_e r, -\pi < v \leq \pi$.

(iii) $w = Lnz$ *mappe le rayon* $arg\ (z) = \theta$ *sur la ligne horizontale* $v = \theta, -\infty < u < \infty$.

Exemple 6: Application logarithmique

Trouvez l'image de l'anneau $2 \leq |z| \leq 4$ *sous l'application logarithmique* $w = Ln\ z$.



(a) L'anneau $2 \leq |z| \leq 4$ (b) L'image de l'espace annulaire en (a)

Figure 4.8 L'application $w = Lnz$

Solution

D'après la propriété (ii) de l'application logarithmique, les cercles de frontière $|z| = 2$ et $|z| = 4$ de l'anneau mappent sur les segments de ligne verticale $u = log_e 2$ et $u = log_e 4$, $-\pi < v \leq \pi$, respectivement.

De manière similaire, chaque cercle $|z| = r, 2 \leq r \leq 4$, correspond à un segment de ligne verticale $u = log_e r, -\pi < v \leq \pi$.

Comme la fonction logarithmique réelle augmente sur son domaine, il s'ensuit que $u = log_e r$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $log_e 2 \leq u \leq log_e 4$ lorsque $2 \leq r \leq 4$.

Par conséquent, l'image de l'anneau $2 \leq |z| \leq 4$ La couleur de la figure 4.8 (a) est la région rectangulaire $log_e 2 \leq u \leq log_e 4, -\pi < v \leq \pi$, représentée en gris dans la figure 4.8 (b).

Autres branches de lnz

La branche principale du logarithme complexe f_1 définie dans (19) n'est qu'une des nombreuses branches possibles de la fonction à valeurs multiples $F(z) = ln\, z$.

Nous pouvons définir d'autres branches de F en modifiant simplement l'intervalle définissant θ dans (18) en un autre intervalle de longueur 2π.

Par exemple,

$$f_2(z) = log_e r + i\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

définit une branche de F dont la branche coupée est l'axe imaginaire non positif. Vous devriez vérifier que pour la branche f_2 nous avons

$$f_2(1) = 0, \qquad f_2(2i) = log_e 2 + \frac{1}{2}\pi i \quad et \quad f_2(-1-i) = \frac{1}{2} log_e 2 + \frac{5}{4}\pi i.$$

De la même manière que nous avons prouvé que la branche principale f_1 du logarithme complexe est analytique, nous pouvons également montrer que toute branche

$$f_k(z) = log_e r + i\theta, \qquad \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi,$$

de $F(z) = ln\, z$ est analytique sur son domaine, et son dérivé est donné par:

$$f_k'(z) = \frac{1}{z}$$

c) Puissances complexes

Inspirés par l'identité $x^a = e^{alnx}$ dans des variables réelles, nous pouvons définir des puissances complexes d'un nombre complexe.

Si a est un nombre complexe et $z = x + iy$, alors z^a est défini par

$$z^a = e^{alnz}, \; z \neq 0 \qquad (1)$$

En général, z^a est à une valeurs multiples puisque $ln\, z$ est à une valeurs multiples.

Cependant, dans le cas particulier où $a = n$, n 0, 1, 2, . . ., (10) est à valeur unique puisqu'il n'y a qu'une seule valeur pour z^2, z^3, z^{-1}, etc.

Pour voir qu'il en est ainsi, supposons $a = 2$ et $z = re^{i\theta}$, où θ est un argument quelconque de z.

Alors

$$e^{2lnz} = e^{2(log_e r + i\theta)} = e^{2log_e r + 2i\theta} = e^{2log_e r} e^{2i\theta}$$

$$= r^2 e^{i\theta} e^{i\theta} = \left(re^{i\theta}\right)\left(re^{i\theta}\right) = z^2$$

Exemple 1: Puissances complexes

Trouver les valeurs de la puissance complexe donnée par:

(a) i^{2i}, *(b)* $(1 + i)^i$.

Solution

(a) Pour $z = i$, $argz = \frac{\pi}{2}$ et $a = 2i$, il s'ensuit de (10) que

$$i^{2i} = e^{2ilni} = e^{2i(log_e 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi))} = e^{-(1+4n)\pi}$$

où $= 0, 1, 2, \ldots$. L'inspection de l'équation montre que i^{2i} est réel pour chaque valeur de n.
Puisque $\frac{\pi}{2}$ est l'argument principal de $z = i$, nous obtenons la valeur principale de i^{2i} pour $n = 0$. À quatre décimales arrondies, cette valeur principale est $i^{2i} = e^{-\pi} = 0.0432$.

(b) Ici nous avons $z = i + 1$ et $a = i$ donc (voir exemple 3 (b))

$$(1 + i)^i = e^{i\, ln(1+i)} = e^{i[\frac{log_e 2}{2} + \frac{(8n+1)\pi i}{4}]},$$

ou

$$(1+\ i)^{i} = e^{-\frac{(8n+1)\pi}{4}+i\frac{log_e 2}{2}} \text{ pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Les puissances complexes définies par (1) satisfont les propriétés suivantes, analogues à celles des puissances réelles:

$$z^{a_1}z^{a_2} = z^{a_1+a_2}, \frac{z^{a_1}}{z^{a_2}} = z^{a_1-a_2}, et\ (z^{\alpha})^n = z^{n\alpha} \text{ pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (5)$$

Valeur principale d'une puissance complexe

Si α est un nombre complexe et $z \neq 0$, alors la fonction définie par:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz} \qquad (6)$$

est appelée la valeur principale de la puissance complexe z^{α}.

Exemple 2: Valeur principale d'une puissance complexe

Trouvez la valeur principale de chaque puissance complexe:

(a) $(-3)^{\frac{i}{\pi}}$, *(b)* $(2i)^{1-i}$

Solution

Dans chaque partie, on utilise (6) pour trouver la valeur principale de z^{α}.

(a) Pour $z = -3$, nous avons $|\ z\ | = 3$ et $Arg\ (-3) = \pi$, et donc $Ln(-3) = log_e 3 + i\pi$ Ainsi, en identifiant $z = -3$ et $\alpha = \frac{i}{\pi}$ dans (6), on obtient:

$$(-3)^{\frac{i}{\pi}} = e^{(\frac{i}{\pi})Ln(-3)} = e^{(\frac{i}{\pi})(log_e 3+i\pi)} \text{ ou } (-3)^{\frac{i}{\pi}} = e^{-1+i\frac{log_e 3}{\pi}}.$$

D'où

$$e^{-1+i(loge3)/\pi} = e^{-1}(\cos\frac{log_e 3}{\pi} + i\sin\frac{log_e 3}{\pi},$$

(b) Pour $z = 2i$, nous avons $|\ z\ | = 2\ et\ Arg(z) = \frac{\pi}{2}$, et donc $Ln\ 2i = log_e 2 + i\frac{\pi}{2}$

En identifiant $z = 2i$ et $\alpha = 1 - i$ dans (6) on obtient:

$$(2\ i)^{1-i} = e^{(1-i)\ Ln2i} = e^{(1-i)\ (log_e 2 + i\frac{\pi}{2})},$$

Ou

$$(2i)^{1-i} = e^{log_e 2 + \frac{\pi}{2} - i\ (log_e 2 - \frac{\pi}{2})}.$$

D'où :

$$(2i)^{1-i} = e^{log_e 2 + \frac{\pi}{2}}(\cos\left(log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right))$$

Analyticité

En général, la valeur principale d'une puissance complexe z^{α} définie par (6) n'est pas une fonction continue sur le plan complexe car la fonction $Ln\ z$ n'est pas continue sur le plan complexe.

Cependant, puisque la fonction $e^{\alpha z}$ est continue sur tout le plan complexe et que la fonction $Ln\ z$ est continue sur le domaine $|\ z\ | > 0, -\pi\ < arg\ (z)\ < \pi$, il s'ensuit que z^{α} est continu sur le domaine $|\ z\ | > 0, -\pi < arg\ (z) < \pi$.

Utilisation des coordonnées polaires $r = |\ z\ |\ et\ \theta = arg(z)$, nous avons trouvé que la fonction définie par:

$$f_1\ (z) = \ e^{\alpha\ (log_e r + \ i\theta)}, \qquad -\pi\ < \theta\ < \pi \qquad (7)$$

est une branche de la fonction à valeurs multiples $F(z) = z^{\alpha} = \ e^{\alpha\ ln\ z}$.

Cette branche particulière est appelée la branche principale de la puissance complexe z^{α} sa branche coupée est l'axe réel non positif, et $z\ =\ 0$ est un point de branchement.

La branche f_1 définie par (7) est en accord avec la valeur principale z^{α} définie par (6) sur le domaine $|\ z\ |\ >\ 0, -\pi\ < arg\ (z)\ < \pi$.

Par conséquent, la dérivée de f_1 peut être trouvée en utilisant la règle de chaîne (6) de la section 3.1:

$$f_1'(z) = \frac{d}{dz} e^{\alpha Lnz} \ =\ e^{\alpha Lnz} \frac{d}{dz}\ [\alpha\ Lnz] =\ e^{\alpha Lnz} \frac{\alpha}{z}. \qquad (8)$$

Utilisation de la valeur principale $z^{\alpha}\ =\ e^{\alpha Lnz}$, nous trouvons que (8) simplifiée a

$$f_1'(z) =\ \alpha \frac{z^{\alpha}}{z} =\ \alpha z^{\alpha - 1}.$$

C'est-à-dire sur le domaine $|\ z\ | > 0, -\pi\ < arg\ (z)\ < \pi$, la valeur principale de la puissance complexe z^{α} est différentiable et

$$\frac{d}{dz} z^{\alpha}\ =\ \alpha z^{\alpha - 1}. \qquad (9)$$

Cela démontre que la règle de puissance (7) de la section 3.1 est valable pour la valeur principale d'une puissance complexe dans le domaine indiqué.

D'autres branches de la fonction à valeurs multiples $F(z)\ =\ z^{\alpha}$ peuvent être définies à l'aide de la formule de (7) avec un intervalle différent de longueur 2π définissant θ.

Exemple, $f_2\ (z) =\ e^{\alpha\ (log_e r + \ i\theta)},\ -\frac{\pi}{5} < \theta\ < \frac{\pi}{4}$, définit une branche de F dont la branche coupée est le rayon $arg\ (z) = -\frac{\pi}{4}$ avec le point de branchement $z\ =\ 0$.

Exemple 3: dérivée d'une fonction de puissance

> *Trouver la dérivée de la valeur principale* z^i *au point* $z\ =\ 1 +\ i$.

Solution

Parce que le point $z\ =\ 1 +\ i$ est dans le domaine $|\ z\ | > 0, -\pi < arg\ (z) < \pi$, il résulte de (9) que:

$$\frac{d}{dz} z^i = i z^{i-1} \,,$$

Et donc

$$\frac{d}{dz} z^i \bigg|_{1+i} = i z^{i-1} \Big|_{1+i} = i(i+1)^{i-1}$$

Nous pouvons utiliser (5) pour réécrire cette valeur comme suit:

$$i(i+1)^{i-1} = i(i+1)^i (i+1)^{-1} = i(i+1)^i \frac{1}{i+1} = \frac{1+i}{2}(i+1)^i$$

De plus, à partir de la partie (b) de l'exemple 1 avec $n = 0$, la valeur principale de $(i+1)^i$ est:

$$(i+1)^i = e^{-\frac{\pi}{4}+i\frac{\log_e 2}{2}},$$

Et par suite

$$\frac{d}{dz} z^i \bigg|_{1+i} = \frac{1+i}{2} e^{-\frac{\pi}{4}+i\frac{\log_e 2}{2}}.$$

Remarques

(i) Certaines propriétés de puissances réelles ne sont pas satisfaites par des puissances complexes.

Un exemple en est que pour les puissances complexes, $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1 \alpha_2}$ sauf si α_2 est un entier.

(ii) Comme dans le cas des logarithmes complexes, certaines propriétés qui valent pour des puissances complexes ne valent pas pour des valeurs principales de puissances complexes.

Exemple, en utilisant la définition 4.4 et le théorème 4.2, nous pouvons prouver que

$$(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$$

pour tous les nombres complexes non nuls z_1 *et* z_2.

Cependant, cette propriété n'est pas vraie pour les valeurs principales de ces puissances complexes.

En particulier, si $z_1 = -1$, $z_2 = i$ *et* $\alpha = i$, nous avons donc de (6) que la valeur principale de $(-1 \cdot i)^i$ est $e^{iLn\,(-i)} = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Par ailleurs, le produit des valeurs principales de $(-1)^i$ *et* i^i est

$$e^{iLn\,(-1)}\, e^{iLn\, i} = e^{-\pi} e^{-\pi/2} = e^{-3\frac{\pi}{2}}.$$

Annexe B - Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Introduction

Dans cette section, nous définissons les fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes. Comme pour les fonctions complexes e^z et Lnz définies dans la section précédente, ces fonctions seront en accord avec leurs équivalents réelles pour les valeurs réelles de z.

De plus, nous montrerons que les fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes ont les mêmes dérivées et satisfont bon nombre des mêmes identités que les fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles.

a) Fonctions trigonométriques

Si x est une variable réelle, alors la formule d'Euler donne

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sin\, x \text{ et } e^{-ix} = cos\, x - i\, sin\, x.$$

En soustrayant puis en ajoutant ces équations, nous voyons que les fonctions réelles $sin\, x$ et $cos\, x$ peuvent être exprimées sous la forme d'une combinaison de fonctions exponentielles:

$$sin\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \qquad (1)$$

En utilisant (1) comme modèle, nous définissons maintenant les sinus et cosinus d'une variable complexe:

Sinus et cosinus trigonométriques

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

$$sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (2)$$

Comme en trigonométrie, nous définissons quatre fonctions trigonométriques supplémentaires en termes de $sin\, z$ et de $cos\, z$:

$$tanz = \frac{sinz}{cosz},\; cotz = \frac{1}{tanz}, secz = \frac{1}{cosz},\; cscz = \frac{1}{sinz}. \qquad (3)$$

Lorsque $y = 0$, chaque fonction dans (2) et (3) se réduit à sa contrepartie réelle.

Analyticité

Puisque les fonctions exponentielles e^{iz} et e^{-iz} sont des fonctions entières, il en résulte que $sin\, z$ et $cos\, z$ sont des fonctions entières. Maintenant, comme nous le verrons bientôt, $sin\, z = 0$ uniquement pour les nombres réels $z = n\pi$, n un entier et $cos\, z = 0$ uniquement pour les nombres réels $z = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, n un entier.

Ainsi, $tan\, z$ et $sec\, z$ sont analytiques sauf aux points $z = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, et $cot\, z$ et $csc\, z$ sont analytiques sauf aux points $z = n\pi$.

Dérivées

Puisque $\frac{d}{dz}e^z = e^z$, il découle de la règle en chaîne que

$$\left(\frac{d}{dz}\right)e^{iz} = ie^{iz} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dz}\right)e^{-iz} = -ie^{-iz}.$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dz}\,sin\,z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \,cos\,z.$$

En fait, il est facile de montrer que les formes des dérivées des fonctions trigonométriques complexes sont les mêmes que les fonctions réelles. Nous résumons les résultats:

$$\frac{d}{dz}\,sin\,z = \,cos\,z, \qquad \frac{d}{dz}cos\,z\, = -sin\,z$$

$$\frac{d}{dz}\,tan\,z = sec^2\,z, \qquad \frac{d}{dz}cot\,z\, = -csc^2\,z \tag{4}$$

$$\frac{d}{dz}\,sec\,z = \,sec\,z\,tan\,z, \qquad \frac{d}{dz}csc\,z\, = -csc\,z\,cot\,z$$

Identités

Les identités trigonométriques bien connues sont également les mêmes dans le cas complexe:

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z$$

$$cos^2\,z + sin^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1\, z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z\,, \cos 2z = cos^2\,z - sin^2 z$$

Zéros

Pour trouver les zéros de $\sin z$ et de $\cos z$, nous devons exprimer les deux fonctions sous la forme $u + iv$. Avant de commencer, rappelons du calcul que si y est réel, alors le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique sont définis en fonction des fonctions exponentielles réelles e^y et e^{-y}:

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \qquad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \tag{5}$$

Maintenant, à partir de la définition 7.1 et de la formule d'Euler, nous trouvons, après simplification,

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \sin x\,.\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\,.\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

Donc, à partir de (5), nous avons

$$sin\,z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y \tag{6}$$

Il est laissé comme exercice pour montrer que

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{7}$$

A partir de (6), (7) et $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$, nous trouvons

$$|sin\, z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad et \quad |cos\, z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \qquad (8)\ et\ \ (9)$$

Maintenant, un nombre complexe z vaut zéro si et seulement si $|z|^2 \ = \ 0$.

Ainsi, si $sin\ z = \ 0$, alors de (8) nous devons avoir $\sin^2 x + \sinh^2 y$.

Cela implique que $\sin x = 0$ et $\sinh y = 0$, et donc $x = \ n\pi$ et $y \ = \ 0$.

Ainsi, les seuls zéros de $\sin z$ sont les nombres réels

$$z = \ n\pi + i0 = n\pi, n = \ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

De même, il résulte de (9) que $cos\ z = 0$ uniquement lorsque

$$z = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n = \ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Exemple 1: valeur complexe de la fonction sinus

À partir de (6) nous avons, à l'aide d'une calculatrice,

$$sin\ (2 + \ i) = \ sin\ 2\ cosh\ 1 + \ i\ cos\ 2\ sinh\ 1 = 1{,}4031 + \ 0{,}4891\ i.$$

En trigonométrie ordinaire, nous sommes habitués au fait que $|sin\ x| \leq \ 1$ et $|cos\ x| \leq \ 1$. L'inspection de (8) et (9) montre que ces inégalités ne valent pas pour les sinus et cosinus complexes, car $\sinh y$ peut aller de $-\infty$ à $+\infty$. En d'autres termes, il est parfaitement possible d'avoir des solutions pour des équations telles que $\cos z = 10$.

Exemple 2: résolution d'une équation trigonométrique

> *Résoudre l'équation* $cos\ z = 10$.

Solution

À partir de (2), $cos\ z \ = \ 10$ équivaut à $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ = \ 10$.

En multipliant la dernière équation par e^{iz}, on obtient alors l'équation quadratique ene^{iz} :

$$e^{2iz} - \ 20e^{iz} \ + \ 1 = 0$$

De la formule quadratique nous trouvons $e^{iz} = 10 \pm 3\sqrt{11}$.

Donc pour $n = \ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ nous avons

$$iz = log_e\left(10 \pm 3\sqrt{11}\right) + 2\pi ni$$

Divisons par i et utilisons

$$log_e\left(10 - 3\sqrt{11}\right) = -log_e\left(10 + 3\sqrt{11}\right)$$

nous pouvons exprimer les solutions de l'équation donnée comme suit :

$$z = 2n\pi \pm i log_e \left(10 + 3\sqrt{11}\right).$$

b) Fonctions hyperboliques

Nous définissons les sinus et cosinus hyperboliques complexes d'une manière analogue aux définitions réelles données dans (5).

Sinus et cosinus hyperboliques

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

$$sinh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ cosh\, y = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad (10)$$

Les fonctions de tangente hyperbolique, cotangente, sécante et cosécante sont définies en termes de $sinh\, z$ et $cosh\, z$:

$$tanh\, z = \frac{sinh\, z}{cosh\, z},\ \ coth\, z = \frac{1}{tanh\, z},\ \ sech\, z = \frac{1}{cosh\, z},\ \ csch\, z = \frac{1}{sinh\, z}. \qquad (11)$$

Le sinus et le cosinus hyperboliques sont des fonctions entières et les fonctions définies en (11) sont analytiques sauf aux points où les dénominateurs sont nuls. Il est également facile de voir à partir de (10) que

$$\frac{d}{dz} sinh\, z = cosh\, z \quad et \quad \frac{d}{dz} cosh\ z = sinh\ z \ . \qquad (12)$$

Il est intéressant de noter que, contrairement au calcul réel, les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont liées dans le calcul complexe. Si nous remplaçons z par iz partout dans (10) et comparons les résultats avec (2), nous voyons que $sinh\ (iz) = i\ sinz$ et $cosh\ (iz)\ =\ cosz$.

Ces équations nous permettent d'exprimer $\sin z$ et $\cos z$ en termes de $sinh\ (iz)$ et de $cosh\ (iz)$, respectivement. De même, en remplaçant z par iz dans (2), nous pouvons exprimer, à leur tour, $sinhz$ et $coshz$ en termes de $sin\ (iz)$ et de $cos\ (iz)$. Nous résumons les résultats:

$$\sin z = -i \sinh(iz),\ \ \cos z = \cosh(iz) \qquad (13)$$

$$\sinh z = -i \sin(iz)\ ,\ \ \cosh z = \cos(iz) \qquad (14)$$

Zéros

Les relations données en (14) nous permettent de déduire des identités pour les fonctions hyperboliques en utilisant les résultats pour les fonctions trigonométriques.

Par exemple, pour exprimer $\sinh z$ sous la forme $u +\ iv$ nous écrivons $\sinh z = -\ i \sin(iz)$ sous la forme $sinh\ z = -\ i\ sin\ (-y +\ ix)$ et utilisons (6):

$$sinh\ z = -i\ [sin\ (-y)\ cosh\ x\ i\ cos\ (-y)\ sinh\ x].$$

Puisque $sin\ (-y) = -\ sin\ y$ et $cos\ (-y) =\ cos\ y$, l'expression qui précède se simplifie

$$sinh\ z =\ sinh\ x\ cos\ y +\ i\ cosh\ x\ sin\ y. \qquad (15)$$

De même,

$$cosh\, z = \ cosh\, x\, cos\, y + \ i\, sinh\, x\, sin\, y. \qquad (16)$$

Il découle aussi directement de (14) que les zéros de $sinh\, z$ et de $cosh\, z$ sont purement imaginaires et sont, respectivement,

$$z = n\pi i \quad et \ \ z = (2n + 1)\frac{\pi i}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Périodicité

Puisque $sinx$ et $cosx$ sont 2π-périodiques, nous pouvons facilement démontrer que $\sin z$ et $\cos z$ sont également périodiques avec la même période réelle 2π.

Par exemple, dans (6), notez que

$$sin(z + 2\pi) \ = \ sin\,(x + 2\pi + iy)$$

$$= \ sin\,(x + 2\pi)\, coshy \ + \ icos\,(x + 2\pi)\, sinhy$$

$$= \ sinx\, coshy \ + \ i\, cosx\, sinhy;$$

c'est-à-dire $sin\,(z + 2\pi) \ = \ sinz$.

De la même manière, il résulte de (7) que $cos\,(z + 2\pi) \ = \ cos\, z$.

De plus, les fonctions hyperboliques $sinhz$ et $coshz$ ont la période imaginaire $2\pi i$.

Ce dernier résultat résulte soit de la définition 7.2 et du fait que e^z est périodique avec une période de $2\pi i$, soit de (15) et (16) et en remplaçant z par $z \ + \ 2\pi i$.

Annexe C - Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses

Introduction

En tant que fonctions d'une variable complexe z, nous avons vu que les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont périodiques. Par conséquent, ces fonctions ne possèdent pas d'inverses qui sont des fonctions dans l'interprétation la plus stricte de ce mot.

Les inverses de ces fonctions analytiques sont des fonctions à valeurs multiples.

Comme nous l'avons fait à la section 6, lors de l'examen de la fonction logarithmique, nous allons supprimer l'adjectif à valeurs multiples tout au long de la discussion qui suit.

a) Les fonctions trigonométriques inverses

L'inverse de la fonction sinus, écrite sous forme $sin^{-1}z$ ou arcsin z, est définie par

$$w = sin^{-1}z \text{ si } z = sin\, w. \qquad (1)$$

La fonction sinus inverse peut être exprimée en fonction de la fonction logarithmique.

Pour voir cela, nous utilisons (1) et la définition de la fonction sinus:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \text{ ou } e^{2iw} - 2\, ize^{iw} - 1 = 0.$$

De la dernière équation et de la formule quadratique, on obtient alors

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

En résolvant (2) en w, on trouve

$$sin^{-1}z = \text{arcsin}\, z = -i\, ln\left(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (3)$$

En procédant de la même manière, nous trouvons les inverses du cosinus et de la tangente

$$cos^{-1}z = \text{arccos}\, z = -i\, ln\left(z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (4)$$

$$tan^{-1}z = \text{arctan}\, z = \frac{i}{2} ln\frac{i + z}{i - z} \qquad (5)$$

Exemple 1

Trouver la valeur de $sin^{-1}\sqrt{5}$.

Solution

A partir de (3) nous avons

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i \ln\left[\sqrt{5}i + (1 - \left(\sqrt{5}\right)^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Avec $(1 - \left(\sqrt{5}\right)^2)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = \pm 2i$, l'expression précédente devient

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i\ln\left[\left(\sqrt{5}\pm 2\right)i\right] = -i\left[\log_e\left(\sqrt{5}\pm 2\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right],\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Le résultat précédent peut être un peu simplifié en notant que

$$\log_e\left(\sqrt{5} - 2\right) = \log_e\left(1/(\sqrt{5} + 2)\right) = -\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

Donc pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right) \qquad (6)$$

Pour obtenir des valeurs particulières de, disons, $\sin^{-1}z$, nous devons choisir une racine spécifique de $1 - z^2$ et une branche spécifique du logarithme.

Exemple, si nous choisissons $(1 - \left(\sqrt{5}\right)^2)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = 2i$ et la branche principale du logarithme, alors (6) donne la valeur unique

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} - i\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

Dérivées

Les dérivées des trois fonctions trigonométriques inverses considérées ci-dessus peuvent être trouvées par différenciation implicite.

Pour trouver la dérivée de la fonction sinus inverse $w = sin^{-1}z$, commençons par différencier $z = \sin w$: $\frac{d}{dz}\, z = \frac{d}{dz}\, sin\, w$ donne $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{cosw}$.

En utilisant l'identité trigonométrique $cos^2w + sin^2w = 1$ sous la forme

$$\cos w = (1 - sin^2w)^{\frac{1}{2}} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dz}\ sin^{-1}z = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (7)$$

De même on trouve

$$\frac{d}{dz}\ cos^{-1}z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dz}\ tan^{-1}z = \frac{1}{1 + z^2} \qquad (9)$$

Il convient de noter que les racines carrées utilisées en (7) et (8) doivent être cohérentes avec les racines carrées utilisées en (3) et (4).

Exemple 2: Évaluation d'une dérivée

Trouvez la dérivée de $w = sin^{-1}z$ *en* $z = \sqrt{5}$.

Solution

Dans l'exemple 1, si nous utilisons $(1-\left(\sqrt{5}\right)^2)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = 2i$, alors cette même racine doit être utilisée dans (7).

La valeur de la dérivée cohérente avec ce choix est donné par

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=\sqrt{5}} = \frac{1}{(1-\left(\sqrt{5}\right)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(-4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

b) Fonctions hyperboliques inverses

Les fonctions hyperboliques inverses peuvent également être exprimées en termes de logarithme. Nous résumons ces résultats pour le sinus hyperbolique inverse, le cosinus et la tangente ainsi que leurs dérivées:

$$sinh^{-1}z = \arg\mathrm{sh}\, z = arsinh\, z = \ln\left[z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{10}$$

$$cosh^{-1}z = \arg\mathrm{ch}\, z = arcosh\, z = \ln\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{11}$$

$$tanh^{-1}z = \arg\mathrm{th}\, z = artanh\, z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dz}\, sinh^{-1}z = \frac{1}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dz}\, cosh^{-1}z = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz}\, tanh^{-1}z = \frac{1}{1-z^2} \tag{15}$$

Exemple 3: Valeurs d'un cosinus hyperbolique inverse

Trouver toutes les valeurs de $cosh^{-1}(-1)$.

solution

À partir de (11) avec $z = -1$, on obtient

$$cosh^{-1}(-1) = \ln(-1) = log_e 1 + i(\pi + 2n\pi)$$

Puisque $log_e 1 = 0$, nous avons pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$cosh^{-1}(-1) = i(\pi + 2n\pi).$$

Bibliographie

1. Marden J. E. and Hoffman J.M. : Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

2. Elias M. Stein & Rami Shakarchi : Complex Analysis, Princeton University Press, 2003.

3. John M. Howie : Complex Analysis, Springer, 2007.

4. S. Ponnusamy : Foundations of Complex Analysis, Narosa.

5. Lars V. Ahlfors : Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

6. J. W. Brown and R. V. Churchill : Complex Variables and Applications, Mc Graw-Hill, Inc, New York, (8th Edn.)